# 目　录

# 引　　言

本讲义可作：A)研究 Sobolev 空间的引论；B)研究椭圆型边值问题的引论.

要对方向 A)进一步研究，可参看

Aronszajn-Smith, Theory of Bessel Potentials, (I), (II), Annales Institut Fourier, 1961 和即将出版的；

A. P. Caldéron, Conférence de Berkeley 1960;

E. Gaglioardo, 在正文中所引用的工作及 Riarche di Matematica, t. 8(1959), p. 24～51;

J. L. Lions, Théorèmes de Trace et d'interpolation, (I)…(V), Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa (1959), (1960); Journal de Liouville, Math. Annalen (1963), Summa Brasiliensis (1963);

J. L. Lions-E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes (IV), Annali di Pisa, (1961);

S. M. Nikolskii, Usperki Mat. Nauk, t. XVI (1961), p. 63～111(其中可找到有关这方面的许多苏联工作的文献)；

L. Nirenberg, Cours de Pisa 1958 (Annali di Pisa, 1959).

在方向 B)，由于时间不够，我们没有阐明当 $L^p$, $p\neq 2$ 时的理论——请参见：

S. Agmon, Annali di Pisa (1959), p. 405～448;

S. Agmon-A. Douglis-L. Nirenberg, Comm. Pure Applied Maths., (1959), p. 623～727;

F. Browder, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 45 (1959), p. 365～372, Indagationes Math. XXII (1960), p. 145～169 以及作者自 1960 年起在 Math. Annalen 上的一些文章;

M. Schechter, 自 1958 年起在 Comm. Pure Applied Maths. 上发表的工作以及 E. Magenes 同作者关于非齐次问题的理论的工作 (Annali Scuola Norm. Pisa, 16 (1962), p. 1～44 及其中的文献).

补充说明: 还参见 C. B. Morrey Jr. 的报告, Bull. Amer. Math. Soc., No. 4, July 1962.

**第 1 章**

# 某些函数空间

## 1. 记号——在 $R^n$ 的一开集上的广义函数

**1.1 恒以 $\Omega$ 表示 $R^n$ 的一开集，$\Omega$（或 $R^n$）的一般点是**

$$x=(x_1, \cdots, x_n);\ dx=dx_1\cdots dx_n.$$

用 $\mathscr{D}(\Omega)$ 表示在 $\Omega$ 中无穷可微且在 $\Omega$ 中紧致支集的（复值的）函数的空间；自然地，若 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，$\varphi$ 的支集一般依赖于 $\varphi$！对 $\varphi$ 的导数的记号规定如下：若 $j$ 是一组 $n$ 个 $\geqslant 0$ 的整数，

$$j=(j_1, \cdots, j_n),$$

置

$$D^j\varphi=\frac{\partial^{j_1+j_2+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}\varphi.$$

$\mathscr{D}(\Omega)$ 上的**伪拓扑** 对下文来说，下面的概念将是充分的：若 $\varphi_m$ 是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中的一个序列，说在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $\varphi_m\to 0$，如果成立

1°）$\varphi_m$ 的支集落在 $\Omega$ 的一个固定的紧致集中.

2°）对任何 $j$，$D^j\varphi_m\to 0$ 在 $\Omega$ 中均匀地成立.

**1.2 $\Omega$ 上的广义函数**

用 $\mathscr{D}'(\Omega)$（称为 **$\Omega$ 上的广义函数空间**）表示 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的**对偶空间**，即 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的线性连续泛函的空间. 于是，若 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$，又若 $\langle T, \varphi\rangle$ 表示它与 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 的数量积，

$$\varphi\to\langle T, \varphi\rangle$$

就是$\mathscr{D}(\Omega)$上的一个连续的线性的泛函.换言之，若$\varphi_m\to 0$在$\mathscr{D}(\Omega)$中成立,那末$\langle T, \varphi_m\rangle\to 0$.

**例 1.1** 若$f$是$\Omega$上的一局部可和的函数，可验证$\varphi\to\langle f, \varphi\rangle=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$定义$\Omega$上的一个广义函数.

### 1.3 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$的导数

**定义 1.1** 若$T\in\mathscr{D}'(\Omega)$,又若$j=(j_1, \cdots, j_n)$, $j_k\geqslant 0$整数,则$D^jT$是由下式定义的广义函数:

$$\langle D^jT, \varphi\rangle=(-1)^{|j|}\langle T, D^j\varphi\rangle, \tag{1.1}$$

于此

$$|j|=j_1+\cdots+j_n.$$

**练习** 验证它的确定义一广义函数.

**练习** 验证若$f=T$是在$\Omega$上的一个$|j|$次连续可微的函数，那末用(1.1)式定义的$D^jf$与普通的导数$D^jf$全同.[注意，两个在$\Omega$上局部可和的函数$f$, $g$在广义函数意义下全同,当且仅当它们几乎处处相等.]

我们将赋予$\mathscr{D}'(\Omega)$以弱拓扑 在$\mathscr{D}'(\Omega)$中$T_m\to T$,若对于所有的$\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, $\langle T_m, \varphi\rangle\to\langle T, \varphi\rangle$.

可以验证下述重要的性质:

若在$\mathscr{D}'(\Omega)$中$T_m\to T$,那末在$\mathscr{D}'(\Omega)$中$D^jT_m\to D^jT$.

## 2. 空 间 $W^{m,p}(\Omega)$

**2.1** 用$L^p(\Omega)$表示在$\Omega$上$p$次方可和的函数$f$(的类)的空

间；$f$ 在 $L^p(\Omega)$ 中的模是

(2.1) $$\|f\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

我们恒假设 $1<p<\infty$.

**练习** 证明 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

**2.2** 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是空间 $L^p(\Omega)$ 的拓广. 首先注意任何 $f\in L^p(\Omega)$ 确定 $\Omega$ 上的一个广义函数(N°1)，仍记为 $f$，于是能考虑一切阶数的导数 $D^jf$；一般说，它们是 $\Omega$ 上的广义函数，现提出

**定义 2.1** 用 $W^{m,p}(\Omega)$ 表示 $u\in L^p(\Omega)$ 且使

(2.2) $$D^ju\in L^p(\Omega) \text{ 对一切 } |j|\leqslant m \text{ 成立}$$

的函数(类)的空间.

若 $m=0$，$W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$ $(D^0u=u)$.

这无疑是一个向量空间，给它以模：

(2.3) $$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|j|\leqslant m}\int_\Omega |D^ju|^p dx\right)^{1/p}.$$

于是有

**定理 2.1** 装备以模(2.3)的空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是完备的；于是它是一 Banach 空间.

**证** 设 $u_\alpha$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中对模 (2.3) 的一 Cauchy 序列. 于是对每个 $j(|j|\leqslant m)$，$D^ju_\alpha$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 序列；因为 $L^p(\Omega)$ 是完备的，得到

(2.4) $$D^ju_\alpha\to v_j \text{ 在 } L^p(\Omega) \text{ 中成立，} v_j\in L^p(\Omega).$$

但很易于验证，若 $u_\alpha\to v$ 在 $L^p(\Omega)$ 中成立，那末 $u_\alpha\to v$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中成立，于是(参看. 1.3)，$D^ju_\alpha\to D^jv$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中

成立.

与(2.4)相比较,得到 $v_j=D^jv$,以致对一切 $j\ (|j|\leqslant m)$, $D^jv\in L^p(\Omega)$,于是 $v\in W^{m,p}(\Omega)$,而 $u_\alpha\to v$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中成立,证毕.

**注 2.1** 若 $p=2$, $W^{m,2}(\Omega)$ 是一 Hilbert 空间. 通常, 将置

$$W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega). \tag{2.5}$$

若 $u,\ v\in H^m(\Omega)$,其数量积由下式给出:

$$(u,\ v)_{H^m(\Omega)}=\sum_{|j|\leqslant m}\int_\Omega D^ju\overline{D^jv}\,dx. \tag{2.6}$$

## 3. $W^{m,p}(\Omega)$ 的自反性

### 3.1 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的线性连续泛函

对每个 $j$, $|j|\leqslant m$, 映射

$$u\to D^ju \tag{3.1}$$

是 $W^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega)$ 的一个线性连续映射, 而 $W^{m,p}(\Omega)$ 被给以最不精细的拓扑, 它用 $|j|\leqslant m$ 的一切映射(3.1)为连续来描绘.

(利用 Hahn-Banach 定理) 可得到: 对 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一切线性连续泛函 $u\to L(u)$, 存在一族函数 $f_j$,

$$f_j\in L^{p'}(\Omega), \tag{3.2}$$

于此

$$1/p+1/p'=1, \tag{3.3}$$

使成立

$$L(u)=\sum_{|j|\leqslant m}\langle f_j,\ D^ju\rangle=\sum_{|j|\leqslant m}\int_\Omega f_j(x)D^ju(x)\,dx. \tag{3.4}$$

自然地，$f_j$ 不是唯一确定的.

**重要注记** $W^{m,p}(\Omega)$ 的对偶的元素 $L$ 一般不是 $\Omega$ 上的广义函数，我们将重新详细地回到这一点.

## 3.2 从(3.4)我们将推出

**定理3.1** 对于 $1<p<\infty$，空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是自反的.

**证** 设 $u_\alpha$ 是属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 的一有界集合中的一个序列；必须证明（对自反性的必要充分条件）能从序列 $u_\alpha$ 中抽出一序列 $u_\beta$，使 $u_\beta$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中弱收敛. 换言之，使存在 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，且

$$L(u_\beta)\to L(u) \tag{3.5}$$

对于 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一切连续线性泛函 $L$ 成立.

但由于 $D^j u_\alpha$ 属于 $L^p(\Omega)$ 的一有界集合 $(|j|\leqslant m)$，而 $L^p(\Omega)$ 是自反的，所以能抽出一个序列 $u_\beta$，使得对 $|j|\leqslant m$，$D^j u_\beta$ 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛. 这必然在 $L^p(\Omega)$ 中弱成立 $D^j u_\beta\to D^j u$，于是由(3.4)立刻得到(3.5).

上面的证明显然具有一般的特性；它可用于一切空间 $E$，它装备以最不精细的拓扑，此拓扑用 $E$ 到自反 Banach 空间 $F_i(i=1,\cdots,\nu)$ 中的线性映射 $\Pi_i:E\to F_i$ 的连续性来描绘.

## 3.3 $W^{m,p}(\Omega)$ 的均匀凸性(补)

首先回忆下述定义：一 Banach 空间 $E$ 被称为**均匀凸**，若对所有 $\varepsilon>0$，$0<\varepsilon\leqslant 2$，存在一个数 $\delta(\varepsilon)$，使对一切 $f$，$g\in E$，$\|f\|_E=\|g\|_E=1$，$\|f-g\|_E\geqslant\varepsilon$，有 $\left\|\dfrac{f+g}{2}\right\|_E\leqslant 1-\delta(\varepsilon)$.

与一个均匀凸的模相等价的模不必定是均匀凸的，于是有兴趣的空间是那些能提供一个均匀凸模的空间.

设 $E_1$, $E_2$, $\cdots$, $E_\nu$ 是一族均匀凸的空间；若对乘积空间 $E=\prod_{i=1}^{\nu} E_i$ 装配一个模

$$\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{\nu}\|f_i\|_{E_i}^p\right)^{1/p},$$

可以证明(用反证法证明)$E$ 是均匀凸的.

因为由别处已知(Clarkson)空间 $L^p$ 是均匀凸的，由此得到空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 装配以模(2.3)是均匀凸的.

(显然，一切均匀凸的空间是自反的，这重新给出定理3.1).

## 4. $W^{m,p}(\Omega)$ 的子空间

在 $W^{m,p}(\Omega)$, $m\geqslant 1$ 与 $W^{o,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$ 之间的一个很重要的不同是：一般说空间 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中不是稠密的，为使信服这一点，这里有一个基本但有效的方法，首先我们置下述定义：

**定义 4.1** 用 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 表示 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的完备化.

我们来证明

**命题 4.1** 若 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$，那末在 $\Omega$ 上几乎处处(p. p.)等于 $u$ 而在 $\Omega$ 外几乎处处等于 0 的函数 $\tilde{u}$ 属于 $W^{m,p}(R^n)$.

**证** 对于 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，函数 $\tilde{\varphi}$(用类似于 $\tilde{u}$ 的方式定义)属于 $\mathscr{D}(R^n)$，且

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W^{m,p}(R^n)}=\|\varphi\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

因此映射 $\varphi\to\tilde{\varphi}$ 由连续性延拓为 $W_0^{m,p}(\Omega)\to W^{m,p}(R^n)$ 的一个线性连续映射，且若 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$，则 $u$ 在此映射中的象

不是别的就是结果中的那个 $\tilde{u}$.

**应用** 取 $\Omega$ 为一球（仅仅为确定概念起见!），于是在 $\Omega$ 中等于1的函数是在 $W^{m,p}(\Omega)$中，$m$ 任意. 可是 $\tilde{u}$（如命题4.1那样定义）不在 $W^{1,p}(R^n)$中；事实上，$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}$ 是由球面 $\partial\Omega$（$\Omega$ 的界面）所支撑的测度，于是 $\notin L^p(R^n)$. 于是 $u \notin W_0^{m,p}(\Omega)$，这很好地证明了在此情形 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中不是稠密的.

这种推理的方式容易适应于无界开集的情况，假设 $\Omega$ 的余集不是"太小". 我们将在更后面明确这一点. 现在先来证明

**命题 4.2** 若 $\Omega = R^n$，那末 $\mathscr{D}(R^n)$ 在 $W^{m,p}(R^n)$ 中是稠密的.

**证** 通过截断及正规化. 设 $M \in \mathscr{D}(R^n)$，

$$M = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & |x| \geqslant 2 \end{cases} \quad |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

置
$$M_R(x) = M(x/R), \ R > 0.$$

若 $u \in W^{m,p}(R^n)$，可证明当 $R \to \infty$ 时 $M_R u \to u$ 在 $W^{m,p}(R^n)$ 中成立，于是可见由紧致支集函数所形成的 $W^{m,p}(R^n)$ 的子空间是稠密的.

现设 $u \in W^{m,p}(R^n)$，紧致支集. 设 $\rho_k$ 是 $\mathscr{D}(R^n)$的一正规序列，即

$$\begin{cases} \rho_k \in \mathscr{D}(R^n), \quad \rho_k \geqslant 0, \ \int_{R^n} \rho_k(x)\,dx = 1, \\ \rho_k \text{ 的支集} \subset \text{以原点为心，半径 } \varepsilon_k \to 0 \text{ 的球中}. \end{cases}$$

于是 $u * \rho_k \in \mathscr{D}(R^n)$，且 $u * \rho_k \to u$ 在 $W^{m,p}(R^n)$ 中成立，这就完成了证明.

在 N°6 我们将给出在 $\Omega$ 上使 $W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$ 成立的充要条件.

在后面几章中我们将研究 $W^{m,p}(\Omega)$ 的另外的子空间.

## 5. 空 间 $W^{-m,p'}(\Omega)$

**定义 5.1** 用 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 表示 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶空间 $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$.

因为 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中稠密，可以将 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 视为 $\Omega$ 上广义函数空间 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的一个子空间:

$$\mathscr{D}(\Omega)\subset W^{-m,p'}(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega).$$

$W^{-m,p'}(\Omega)$ 的广义函数的结构由下述定理给出:

**定理 5.1** $\Omega$ 上的一个广义函数 $T$ 在 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 中的充要条件是能将其写为

$$T=\sum_{|j|\le m}D^j g_j,\quad g_j\in L^{p'}(\Omega). \tag{5.1}$$

注 分解 (5.1) 不是唯一的.

**证** 设 $u\to L(u)$ 是 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 上的一个线性连续泛函. 由 Hahn-Banach 定理，它可延拓为 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一线性连续泛函，对于它，我们已知道其形式[见 (3.4)]. 于是，存在 $f_j\in L^{p'}(\Omega)$，使

$$L(u)=\sum_{|j|\le m}\langle f_j,\ D^j u\rangle,\quad u\in W_0^{m,p}(\Omega).$$

若取 $u\in\mathscr{D}(\Omega)$，那末

$$L(u)=\langle\sum_{|j|\le m}(-1)^{|j|}D^j f_j,\ u\rangle,$$

其中尖括号表示在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 与 $\mathscr{D}(\Omega)$ 间的对偶.

于是能将 $L$ 视为广义函数 $\sum_{|j|<m}(-1)^{|j|}D^j f_j$，由此置 $g_j=(-1)^{|j|}f_j$ 就得到(5.1).

## 6. 使 $W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$ 的充要条件

### 6.1 $m$-$p'$ 极的集合

**定义 6.1** 设 $X$ 是 $R^n$ 的一闭集，用 $W_X^{-m,p'}$ 表示支集包含在 $X$ 中的 $W^{-m,p'}(R^n)$ 的广义函数的空间. 显然，$0\in W_X^{-m,p'}$；称 $X$ 是 $[m;p']$ 极，若

$$W_X^{-m,p'}=\{0\}. \tag{6.1}$$

$[m;p']$ 极的集合是"小"的. 例如：若 $X$ 有正的测度，那末它不是 $[m;p']$ 极；事实上，包含在 $X$ 中的测度 $>0$ 的紧致的特征函数是在 $W_X^{-m,p'}$ 中.

因为 $W^{m+1,p}(R^n)\subset W^{m,p}(R^n)$，故有

$$W^{-m-1,p'}(R^n)\supset W^{-m,p'}(R^n),$$

且因此：

若 $X$ 是 $[m+1;p']$ 极，则它必是 $[m;p']$ 极，其逆不真.

更后面将可看到，对于足够大的 $m$，$W^{m,p}(R^n)$ 被包含在 $R^n$ 上的连续函数空间中，于是 $W^{-m,p}(R^n)$ 包含 Dirac 测度；于是，对于足够大的 $m$，一个集合仅当是空集时才是 $[m;p']$ 极.

再拿起命题 4.1 中的映射 $u\to\tilde{u}$，这里 $\tilde{W}_0^{m,p}(\Omega)$ 表示 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 在此等距映射下的象；于是它是 $W^{m,p}(R^n)$ 的一个闭的子空间，有

**命题 6.1** $\tilde{W}_0^{m,p}(\Omega)\equiv W^{m,p}(R^n)$ 当且仅当 $C\Omega$(=$\Omega$ 的补集或余集)是 $[m;p']$ 极时成立.

**证** 事实上，$\widetilde{W}_0^{m,p}(\Omega)$的极空间由使

$\langle T, \tilde{u}\rangle=0$ 对一切 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$成立

的 $T\in W^{-m,p'}(R^n)$所组成；这等价于

$\langle T, \tilde{u}\rangle=0$ 对一切 $u\in \mathscr{D}(\Omega)$成立，即：在 $\Omega$ 上 $T=0$. 设 $T\in W_X^{-m,p'}$, $X=C\Omega$, 由此就得到命题.

**6.2** 现在可以研究 $W^{m,p}(\Omega)$ 与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是否可能恒等的问题.

**命题 6.2** 若 $W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$, 那末 $C\Omega$ 是 $[m; p']$ 极.

**证** (1) 首先证明 $C\Omega$ 是零测度.

若不然，必存在 $R^n$ 中的一个有界连通开集 $Q$, 使

(6.2) $$Q\cap C\Omega \text{ 有测度}>0,$$

且 $$Q\cap\Omega\neq\emptyset.$$

设 $f$ 是在 $\Omega$ 中取值为 1 的函数，而 $\theta$ 是 $\mathscr{D}(R^n)$的一函数使在 $Q\cap\Omega$ 上，$\theta=1$. 函数 $u=\theta f$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中，于是在 $W_0^{m,p}(\Omega)$中，而因此 $\tilde{u}\in W^{m,p}(R^n)$（见命题 4.1)，且

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}.$$

可是在 $Q$ 上 $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}=0$, 于是在 $Q$ 上 $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}=0$, 于是 $\tilde{u}$ 在 $Q$ 上几乎处处等于常数. 可是 $\tilde{u}$ 在 $Q\cap\Omega$ 上取值 1，在 $Q\cap C\Omega$ 上取值 0, 于是 $Q\cap C\Omega$ 是零测度——这与 (6.2) 矛盾，于是 $C\Omega$ 是零测度.

(2) 设 $U\in W^{m,p}(R^n)$，$u$ 是 $U$ 在 $\Omega$ 上的限制；$u\in W^{m,p}(\Omega)$, 于是 $\in W_0^{m,p}(\Omega)$, 于是 $\tilde{u}\in W^{m,p}(R^n)$ 且因此 $(U-\tilde{u})\in W^{m,p}(R^n)$. 但显然 $U-\tilde{u}=0$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立，且根据

(1)，于是有 $U-\tilde{u}=0$. 于是 $U\in W_0^{m,p}(\Omega)$，这就证明了 $\tilde{W}_0^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(R^n)$. 这样由命题 6.1 就得到结论.

**命题 6.3** 若 $C\Omega$ 是$[1;\ p]$及$[m;\ p']$极,那末

$$W_0^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega).$$

**证** 设 $u\in W^{m,p}(\Omega)$. 问题在于证明 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$. 仍考虑 $\tilde{u}$，它是由 $u$ 在 $\Omega$ 之外用零来延拓而得到的. 于是 $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}-\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}\in W^{-1,p}(R^n)$，且在 $\Omega$ 上 $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}-\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}=0$，因此，$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}-\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}\in W_X^{-1,p}$，$X=C\Omega$. 但 $X$ 是$[1;\ p]$极，因此 $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}-\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}=0$. 更一般地，$D^j(\tilde{u})-(D^ju)^{\sim}=0$，$|j|\leqslant m$. 因此 $\tilde{u}\in W^{m,p}(R^n)$. 但因为 $C\Omega$ 是$[m;\ -p']$极，$u$ 在 $\Omega$ 上的限制是在 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中(命题 6.1)；但这就是 $u$，因此，$u\in W_0^{m,p}(\Omega)$. 证毕.

现在观察是否由"$X[m;\ p']$极"导至"$X[1;\ p]$极"(对于此情况,命题 6.2 及 6.3 提供一必要充分条件).

首先证明下面的结果，它指明了$[m;\ p']$极的性质的局部特征.

**命题 6.4** 使 $X$ 是 $[m;\ p']$ 极的充要条件是对任何紧致的 $K$，$X\cap K$ 是$[m;\ p']$极.

**证** 必要性是显然的,证明其充分性.

设 $T\in W_X^{-m,p'}$. 必须证明 $T=0$. 设 $M_R$ 是已在命题 4.2 的证明中所引入的序列，于是当 $R\to\infty$ 时，$M_RT\to T$ 在 $W^{-m,p'}(R^n)$中成立(容易验证)，且 $M_RT\in W_{X\cap K_R}^{-m,p'}$，其中 $K_R$ 是球 $|x|\leqslant 2R$，因此 $M_RT=0$，由此得到结论.

现在来推出

**命题 6.5** 设 $p'\leqslant q'$，若 $X$ 是 $[m;\ p']$ 极，则它是 $[m;\ q']$ 极.

**证** 设 $K$ 是一任意的紧致集，只须证明（由命题 6.4）$X\cap K$ 是 $[m;\ q']$ 极. 设 $Q$ 是 $R^n$ 的一有界开集，使 $K\subset Q$. 于是

$$W_{X\cap K}^{-m,q'}\equiv(W^{-m,q'}(Q))_{X\cap K}$$

$=$（支集在 $X\cap K$ 中的 $W^{-m,q'}(Q)$ 的广义函数空间）.

但因为 $Q$ 是有界的，且 $p\geqslant q$，所以有

$$W_0^{m,p}(Q)\subset W_0^{m,q}(Q).$$

因此 $W^{-m,p'}(Q)\supset W^{-m,q'}(Q)$，因此

$$(W^{-m,q'}(Q))_{X\cap K}\subset(W^{-m,p'}(Q))_{X\cap K}=\{0\}.$$

由此得到结论.

结果：若 $p'\leqslant p$，即 $p\geqslant 2$，则"$X[1;p']$ 极"导至"$X[1;p]$ 极"，因此：

**定理 6.1** 若 $p\geqslant 2$，使 $W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$ 的充要条件是 $C\Omega$ 是 $[m;p']$ 极.

正如在后面将看到的，还能改进此结果（在证明了Sobolev不等式之后）. 因此，将证明

**定理 6.2** 若 $\dfrac{1}{p}\leqslant\dfrac{1}{2}+\dfrac{m-1}{2n}$，使 $W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$ 的充要条件是 $C\Omega$ 是 $[m;\ p']$ 极.

## 7. $H^m(\Omega)$ 的分解

现在提出相当自然的一个问题是研究 $W^{m,p}(\Omega)$ 与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 之间的"差别"问题. 第一个问题是：$W_0^{m,p}(\Omega)$ 是否在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中允许一个拓扑的补充？

当 $p\neq 2$ 时，此问题的回答仅当 $\Omega$ 有一足够正规的边界时才是熟知的(且是肯定的)．我们以后将重新回到这一点．

这里我们来研究 $p=2$ 的情况．显然，在此情况回答是平凡的；若置：

$$W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega),\ W_0^{m,2}(\Omega)=H_0^m(\Omega),$$

于是问题在于研究 $H_0^m(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的正交补；置：

$$H^m(\Omega)=H_0^m(\Omega)\oplus\mathscr{H}^m(\Omega). \tag{7.1}$$

$H^m(\Omega)$ 的一个元素 $h$ 是在 $\mathscr{H}^m(\Omega)$ 中，当且仅当 $(h,\varphi)_{H^m(\Omega)}=0$ 对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 成立，即

$$\sum_{|j|<m}\int_\Omega D^jhD^j\overline{\varphi}\,dx=0. \tag{7.2}$$

置

$$\Lambda_m=\sum_{|j|<m}(-1)^{|j|}D^{2j}. \tag{7.3}$$

于是(7.2)等价于

$$\Lambda_mh=0. \tag{7.4}$$

因此对在 $H^m(\Omega)$ 中给定的 $u$，存在 $u_0\in H_0^m(\Omega)$ 及 $h\in H^m(\Omega)$，使

$$u=u_0+h \tag{7.5}$$

及

$$\Lambda_mu=\Lambda_mu_0; \tag{7.6}$$

分解(7.5)是唯一的．

这已经化为一个 Dirichlet 问题；以后我们将重新回到这一点．

## 8. 基本算子的另外的系统

**8.1** 在 N°2 定义的空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 涉及到所有阶数 $\leqslant m$ 的

导数.

在实践中引入其他的空间的族是有用的，其中不涉及所有阶数 $\leqslant m$ 的导数.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ 是一些常系数的微分算子(甚至可取具有足够正规的变系数的算子)，用 $W^{A,p}(\Omega)$ 表示使 $A_j u \in L^p(\Omega)$，$j=1, \cdots, \nu$ 的函数 $u \in L^p(\Omega)$ (的类)的空间，装备以模

$$(8.1) \qquad \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{j=1}^{\nu} \|A_j u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}.$$

如同定理 2.1 那样可证实这是一 Banach 空间；$A_j$ 称为“基本算子”.

将 N°3 的注记拓广到此情况没有任何的困难. 相反地，一旦要将 N°4 所建立的那种性质推广到此情况，立刻就出现巨大的困难.

两个特殊情况已经被研究:

(8.2) $\quad p=2$; $\nu=1$; $A_1$ 是常系数的任意的微分算子;

(8.3) $\quad \begin{cases} 1<p<\infty;\ \nu=1;\ A_1 \text{ 是变系数的椭圆(在一将被} \\ \text{确定的意义下)微分算子} \end{cases}$

我们将重新回到情况(8.3)上.

**8.2** 我们要简要地指出一个对弹性力学方程的研究有用的情况. 设 $u=\{u_1, \cdots, u_n\}$ 是一向量; 引入 $u$ 的空间，使对一切 $i$ 及 $j=1, \cdots, n$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in L^p(\Omega).$$

装配以模

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^p}^p + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p},$$

这仍是一 Banach 空间.

## 关于第一章的注记

N°1 给出对广义函数的一个极为简明的摘要，它丝毫不能代替 L. Schwartz 的书，Théorie des distributions, Paris, Hermann, t. 1, 1950 (第二版 1957); t. 2, 1951.

N°2 的空间 $W^{m,p}(\Omega)$是 Sobolev 空间，参看 S. L. Sobolev, Certaines Applications de l'Analye Fonctionnelle à la Physique Mathématique, Léningrad, 1950 (俄文)，很多作者对此空间使用了很多不同的记号: $W_p^{(m)}$, $H^{m,p}$, $P^{m,p}$, $L_p^{(m)}$ 等.

$W^{m,p}(\Omega)$的均匀凸性(N°3)对于后文不是不可避免的，但我们在此给出它，这是因为按照 L. Amerio, Annali Mat. Pura Appl. (4), 53 (1961), p. 371～382, 也参阅 L. Amerio-S. Zaidman 的最近的工作，它在发展方程的概周期解的研究中有用．对于均匀凸空间，参阅 J. A. Clarkson, Uniformly Convex Spaces, Transactions A. M. S., t. 40 (1936), p. 396～414 及 M. M. Day, Normed linear spaces, Frgebnisse der Math., Berlin, 1958.

N°6(对于后文不是不可避免的)导致一未被完全解决的问题: 在限制 $p\geqslant 2$ 下定理 6.1 的表述是否有价值? 对于相近的问题，可以参看 L. Hörmander-J. L. Lions, Math. Scand., 4(1956), p. 259～270; Séminaire L. Schwartz, 1954～1955.

用 N°6 的记号，根据 J. Deny 的结果，Les potentiels d'énergie finie, Acta Math. 82(1950), p. 107～183. [1; 2] 极的闭集合与通常的极的集合全同. (所谓通常的极根据 J. Deny 的结果.)

N°7 包含着一个未解决的问题的表达.

对于 N°8 中(8.2)的研究，我们转回到 L. Hörmander 的工作，且特别是他的最近的书，Springer, Collection Jaune.

# 第 2 章

# $W^{m,p}$ 的性质

## 1. 一个引理

将置：$dx_1dx_2\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_n=dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_n$

**引理 1.1** 设 $E$ 是 $R^n$ 的一个可测集，$n\geqslant 2$；$E_i$ 表示 $E$ 在超平面 $x_i=0$ 上的投影，设 $w_1,\cdots,w_n$ 是一些给定的函数，且

(1.1) $$w_i\in L^{n-1}(E)\quad i=1,2,\cdots,n;$$

(1.2) $$w_i \text{ 不依赖于 } x_i.$$

于是

(1.3) $$\int_E|w_1\cdots w_n|dx\leqslant\prod_{i=1}^n\left(\int_{E_i}|w_i|^{n-1}dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_n\right)^{1/n-1}.$$

**证** 要证明的不等式在 $n=2$ 时是显然的．现在对 $n$ 用归纳法来证明；设(1.3)直到 $n-1$ 成立，对 $n$ 来证明它．

置

$$Y_i=\left(\int_{E_i}|w_i|^{n-1}dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_n\right)^{1/n-1};$$

$$E(x_n^0)=E\cap\{x\,|\,x_n=x_n^0\};$$

$$J(x_n)=\int_{E(x_n)}|w_1\cdots w_n|dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

由 Hölder 不等式：

(1.4) $$J(x_n)\leqslant\left(\int_{E(x_n)}|w_1\cdots w_{n-1}|^{\frac{n-1}{n-2}}dx_1\cdots dx_{n-1}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\cdot\left(\int_{E(x_n)}|w_n|^{n-1}dx_1\cdots dx_{n-1}\right)^{1/n-1}.$$

(1.4)的右端的第二个积分 $\leqslant Y_n$, 若置

$$\varphi_i = |w_i|^{\frac{n-1}{n-2}},$$

第一个积分等于

$$\int_{E(x_n)} \varphi_1 \cdots \varphi_{n-1} dx_1 \cdots dx_{n-1},$$

且可利用归纳法假设, 给出:

$$\int_{E(x_n)} \varphi_1 \cdots \varphi_{n-1} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1} \left( \int_{E(x_n)_i} \varphi_i^{n-2} dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_{n-1} \right)^{1/n-2},$$

其中 $E(x_n)_i = E(x_n)$ 在超平面 $x_i = 0$ 上的投影.

用它们的值来代替 $\varphi_i$, 且置

$$\psi_i(x_n) = \left( \int_{E(x_n)_i} \varphi_i^{n-2} dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_{n-1} \right)^{1/n-1},$$

有

$$\left( \int_{E(x_n)} |w_1 \cdots w_{n-1}|^{\frac{n-1}{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n-1} \psi_i(x_n).$$

因此(1.4)给出

$$J(x_n) \leqslant Y_n \prod_{i=1}^{n-1} \psi_i(x_n),$$

由此根据 Holder 不等式得

$$(1.5) \quad \int_E |w_1 \cdots w_n| dx \leqslant Y_n \int \prod_{i=1}^{n-1} \psi_i(x_n) dx_n$$
$$\leqslant Y_n \prod_{i=1}^{n-1} \left( \int \psi_i(x_n)^{n-1} dx_n \right)^{1/n-1}.$$

但是

$$\left( \int \psi_i(x_n)^{n-1} dx_n \right)^{1/n-1} = \left( \int_{E_i} |w_i|^{n-1} dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n \right)^{1/n-1}$$
$$= Y_i,$$

结果, (1.5)不是别的就是所要证的不等式.

## 2. Sobolev 不等式

现在能证明下面的结果:

**定理 2.1** 设 $p$ 满足 $1\leqslant p<n$, 对于一切 $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$, 有

$$(2.1)\qquad \|\varphi\|_{L^q}\leqslant\frac{1}{n}\,\frac{(n-1)p}{n-p}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^p},$$

于此 $q$ 由下式给出:

$$(2.2)\qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}.$$

**证** 写 $|\varphi|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}=(\varphi\bar{\varphi})^{\frac{(n-1)p}{2(n-p)}}$; 置 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}=D_i$, 得到

$$D_i|\varphi|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}=\frac{(n-1)p}{2(n-p)}(\varphi\bar{\varphi})^{\frac{(n-1)p}{2(n-p)}-1}(\varphi D_i\bar{\varphi}+\bar{\varphi}D_i\varphi).$$

由此对 $x_i$ 积分得到

$$(2.3)\qquad |\varphi|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}\leqslant\frac{(n-1)p}{(n-p)}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^{\frac{(n-1)p}{n-p}-1}|D_i\varphi|\,dx_i.$$

置

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} w_i(x)&=w_i(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n)\\ &=\sup_{x_i}|\varphi(x)|^{p/(n-p)}. \end{aligned}$$

于是(2.3)给出

$$w_i(x)^{n-1}\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}|D_i\varphi|\,dx_i,$$

因此

$$(2.5)\qquad \int w_i(x)^{n-1}dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_n$$

$$\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}|D_i\varphi|\,dx$$

$$\leqslant \frac{(n-1)p}{n-p}\left(\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{n(p-1)}{n-p}\cdot\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int|D_i\varphi|^p dx\right)^{1/p}$$

$$=\frac{(n-1)p}{n-p}\left(\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\|D_i\varphi\|_{L^p}.$$

显然有

$$\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{np}{n-p}}dx\leqslant\int_{R^n}\prod_{i=1}^n\sup_{x_i}|\varphi|^{\frac{p}{n-p}}dx=\int_{R^n}\prod_{i=1}^n w_i(x)dx,$$

且能应用引理 1.1:

$$\int_{R^n}\prod_{i=1}^n w_i(x)dx\leqslant\prod_{i=1}^n\left(\int_{R^{n-1}}w_i^{n-1}dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

且注意到(2.5)可得出

$$\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{np}{n-p}}dx\leqslant\prod_{i=1}^n\left[\left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^{\frac{1}{(n-1)}}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{p-1}{p(n-1)}}\|D_i\varphi\|_{L^p}^{\frac{1}{n-1}}\right].$$

由此得到(通过自乘 $n-1$ 次方):

$$\left(\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{n-1-\frac{n(p-1)}{p}}\leqslant\left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^n\prod_{i=1}^n\|D_i\varphi\|_{L^p},$$

由此得到

$$\left(\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{n-p}{p}}\leqslant\left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^n\frac{1}{n^n}\left(\sum_{i=1}^n\|D_i\varphi\|_{L^p}\right)^n,$$

且通过自乘 $1/n$ 次方,就导得(2.1)

**系 2.1** $\mathscr{D}(R^n)$ 对模

(2.6) $$\sum_{i=1}^n\|D_i\varphi\|_{L^p}$$

的完备化,当 $1\leqslant p<n$ 时,被包含在 $L^q(R^n)$ 中,而 $q$ 由(2.2)式给出。

**证** 设 $D^{1,p}(R^n)$ 为 $\mathscr{D}(R^n)$ 对模(2.6)的完备化. 由装配以由 $D^{1,p}(R^n)$ 所引入的拓扑的 $\mathscr{D}(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 中的恒等映射是连续的,由此得到结论.

**注 2.1** 诚然,$D^{1,p}(R^n)$ 与 $u\in L^q(R^n)$ ($q$ 由(2.2)式给出)且使 $\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^p(R^n)$ 的空间全同.

事实上,用 $\tilde{D}^{1,p}(R^n)$ 表示 $u\in L^q(R^n)$ 且 $\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^p(R^n)$ 并装备以模

$$\|u\|_{L^q}+\sum_{i=1}^{n}\|D_iu\|_{L^p}$$

的空间; 若证明 $\mathscr{D}(R^n)$ 在 $\tilde{D}^{1,p}(R^n)$ 中是稠密的,我们的断言将得到成立. 对此,引入 $M_R$(如同第一章命题 4.2)且置 $u_R=M_Ru$, 来证明 $u_R$ 落在 $\tilde{D}^{1,p}(R^n)$ 的一有界集合中. 为此必须证明 $(D_iM_R)u$ 落在 $L^p(R^n)$ 的一有界集合中. 但是

$$\int|D_iM_R|^p|u|^p\,dx\leqslant\frac{C}{R^p}\int_{|x|<2R}|u|^p\,dx\quad(C=\text{常数})$$

$$\leqslant\frac{C}{R^p}\left(\int_{|x|<2R}|u|^{p\frac{n}{n-p}}\,dx\right)^{\frac{n-p}{n}}\left(\int_{|x|<2R}dx\right)^{p/n}$$

$$\leqslant C_1\left(\int_{|x|<2R}|u|^{\frac{pn}{n-p}}\,dx\right)^{\frac{n-p}{n}}\leqslant C_2,$$

因为 $\frac{pn}{n-p}=q$. 因此能抽出一个序列 $R_n\to\infty$ 使 $u_{R_n}$ 在 $\tilde{D}^{1,p}(R^n)$ 中弱收敛($\tilde{D}^{1,p}(R^n)$ 是自反的, 参考第一章, N°3), 必然 $u_{R_n}\to u$, 由此得到结论.

**系 2.2** 当 $1\leqslant p<n$ 时,有

$$W^{1,p}(R^n)\subset L^q(R^n),\tag{2.7}$$

且具连续嵌入, $q$ 由(2.2)给出.

**注 2.2** 定理 2.1 在下述意义下是最优可能的: 不存在

形如

(2.8) $\|\varphi\|_{L^{q_1}} \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$, $C=$常数, $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$

的不等式，其中 $q_1 \neq q$，而 $q$ 由(2.2)式给定.

事实上，若(2.8)成立，通过过渡到极限，它同样对 $\varphi(x) = \varphi_a(x) = \exp(-a|x|)$, $a>0$ 成立. 但是,

$$\|\varphi_a\|_{L^{q_1}} = C_1 a^{-n/q_1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \leqslant C_2 a^{1-n/p},$$

其中 $C_i$ 表示各种不同的常数. 以致 (2.8) 给出 $C_1 a^{-n/q_1} \leqslant C C_2 a^{1-n/p}$，这当 $a \to +\infty$ 时仅当 $\frac{n}{q_1}+1-\frac{n}{p} \geqslant 0$，而当 $a \to 0$ 时仅当 $\frac{n}{q_1}+1-\frac{n}{p} \leqslant 0$ 时才可能；因此，形如(2.8)的不等式仅当 $q_1=q$ 时才有可能.

我们不知道是否(2.1)中的最佳的常数是已知的.

## 3. $W^{m,p}(R^n)$的初步的性质

**3.1** 重复地应用系 2.2，得到:

**定理 3.1** 若 $\frac{1}{p}-\frac{\mu}{n}>0$，则

(3.1) $$W^{m,p}(R^n) \subset W^{m-\mu,q(\mu)}(R^n),$$

于此

(3.2) $$\frac{1}{q(\mu)} = \frac{1}{p} - \frac{\mu}{n}.$$

在(3.1)中，嵌入是连续的. 特别，若 $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$,

(3.3) $$W^{m,p}(R^n) \subset L^{q(m)}(R^n),$$

于此

$$(3.4) \qquad \frac{1}{q(m)}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n}.$$

在下文中我们将来考察 $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}\leqslant 0$ 的情况.

**3.2** 用 $L^q_{loc}(R^n)$ 表示 $q$ 次方局部可和的函数空间，对模的族

$$\left(\int_{|x|<N}|f(x)|^q dx\right)^{1/q}, \quad N=1, 2, \cdots$$

而言，它是一个 Fréchet 空间(即可度量及完备的).

我们来证明

**定理 3.2** 若 $p=n$, 则

(3.5) $W^{1,p}(R^n)\subset L^q_{loc}(R^n)$ 对一切有限的 $q$ 成立.

证 设 $u\in W^{1,p}(R^n)$. 对于任何 $a\in\mathscr{D}(R^n)$, 函数 $au$ 是在 $W^{1,p}(R^n)$ 中，且具紧致支集，因此特别是在 $W^{1,p-\varepsilon}(R^n)$ 中，$\varepsilon>0$ 任意小. 于是应用系 2.2, $au\in L^{q_\varepsilon}(R^n)$, $\frac{1}{q(\varepsilon)}=\frac{1}{p-\varepsilon}-\frac{1}{n}$. 因此，对一切有限的 $q$ 及对一切 $a\in\mathscr{D}(R^n)$, $au\in L^q(R^n)$, 由此就得到定理.

**系 3.1** 有

(3.6) $W^{m,p}(R^n)\subset L^q_{loc}(R^n)$ 对一切有限的 $q$ 成立，

若

$$(3.7) \qquad \frac{1}{p}-\frac{m}{n}=0.$$

**3.3** 剩下来考察情况 $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}<0$ 或 $m-\frac{n}{p}>0$.

**定理 3.3** 假设

$$(3.8)\qquad m-\frac{n}{p}=\alpha,\ 0<\alpha<1$$

于是一切 $u\in W^{m,p}(R^n)$ 是几乎处处等于一连续函数，仍记其为 $u$. 此外，存在一常数 $C$ 使得

$$(3.9)\qquad |u(x)-u(y)|\leqslant C\|u\|_{W^{m,p}}|x-y|^{\alpha}.$$

若 $\mathscr{E}^0$ 表示连续函数的空间，装备以在所有紧致集上均匀收敛的拓扑，那末 $W^{m,p}(R^n)$ 在 $\mathscr{E}^0$ 中的嵌入是连续的.

**证** 1) 设 $u\in W^{m,p}(R^n)$. 于是 $D_iu=\frac{\partial u}{\partial x_i}\in W^{m-1,p}(R^n)$, 且 $\frac{1}{p}-\frac{m-1}{n}>0\left(因\ m-\frac{n}{p}<1\right)$. 因此，$D_iu\in L^r$, 于此

$$(3.10)\qquad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{m-1}{n}$$

及

$$(3.11)\qquad \|D_iu\|_{L^r}\leqslant C\|u\|_{W^{m,p}}.$$

(下面 $C$ 表示各种不同的常数.)

2) 设 $\Omega_\rho$ 是边长为 $\rho$ 的立方体(且边平行于轴)，包含原点在其内部. 用 $\Omega_{t\rho}$ 表示 $\Omega_\rho$ 的相似立方体，其相似比例为 $t$. 设 $u\in\mathscr{D}(R^n)$. 由等式

$$u(x)-u(0)=\int_0^1\frac{d}{dt}u(tx)dt$$

可导得，对 $x\in\Omega_\rho$,

$$(3.12)\qquad |u(x)-u(0)|\leqslant\rho\int_0^1\sum_{i=1}^n|(D_iu)(tx)|dt.$$

于是由(3.12)导得

$$\left|\frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega_\rho}u(x)dx-u(0)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega_\rho}|u(x)-u(0)|dx$$

$$\leqslant \frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^1 dt\int_{\Omega_\rho}\sum_{i=1}^n |(D_i u)(tx)|dx$$

$$=\frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^1 \frac{dt}{t^n}\int_{\Omega_{t\rho}}\sum_{i=1}^n |(D_i u)(y)|dy.$$

但

$$\int_{\Omega_{t\rho}}|D_i u(x)|dx \leqslant \Big(\int_{\Omega_{t\rho}}|D_i u|^r dx\Big)^{1/r}\Big(\int_{\Omega_{t\rho}}dx\Big)^{1/r'};$$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,$$

而 $r$ 由(3.10)式给定，因此

$$\int_{\Omega_{t\rho}}|D_i u(x)|dx \leqslant C(t\rho)^{n/r'}\|u\|_{W^{m,p}},$$

且因之

$$\Big|\frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega_\rho}u(x)dx-u(0)\Big|$$

$$\leqslant C\rho^{1-n+n/r'}\int_0^1 t^{n/r'-n}dt\|u\|_{W^{m,p}}.$$

因为 $n-\frac{n}{r'}=1-\alpha$，就导得

$$\Big|\frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega_\rho}u(x)dx-u(0)\Big|\leqslant C\rho^{\alpha}\|u\|_{W^{m,p}}. \tag{3.13}$$

现若 $x$ 及 $y$ 是任意的，但 $|x-y|=\rho$，总可将它们考虑为边长 $\leqslant\rho$ 的一个立方体中的点，由此得到

$$|u(x)-u(y)|\leqslant C\|u\|_{W^{m,p}}|x-y|^{\alpha} \tag{3.14}$$

对 $u\in\mathscr{D}(R^n)$成立.

这表明由装配以 $W^{m,p}(R^n)$的拓扑的 $\mathscr{D}(R^n)$ 到 $\mathscr{E}^0$（且同样地到满足阶为 $\alpha$ 的 Lipschitz 条件的函数空间）的恒等映射是连续的；用连续性来延拓且由于 $\mathscr{D}(R^n)$ 在 $W^{m,p}(R^n)$ 中稠密（第一章命题 4.2），就得到定理.

**定理 3.4** 假设

$$(3.15)\qquad m-\frac{n}{p}=1,$$

于是 $W^{m,p}(R^n)\subset\mathscr{E}^0$，且对任何紧致集 $K$ 及任何 $\alpha<1$，存在一常数 $C(K,\alpha)$，使

$$(3.16)\qquad |u(x)-u(y)|\leqslant C(K,\alpha)\|u\|_{W^{m,p}}|x-y|^{\alpha},\quad x,y\in K.$$

**证** 与定理 3.3 同样进行，但这一次 $D_iu\in L^r_{loc}$ 对一切有限的 $r$ 成立.

**定理 3.5** 设

$$(3.17)\qquad m-\frac{n}{p}=k+\alpha,\ k\text{ 整数 }\geqslant 1,\ 0<\alpha\leqslant 1,$$

于是

$$(3.18)\qquad W^{m,p}(R^n)\subset\mathscr{E}^k\text{ 且嵌入连续.}$$

于此 $\mathscr{E}^k$ 表示在 $R^n$ 中 $k$ 次连续可微函数的空间，装配以函数及其阶数 $\leqslant k$ 的各阶导数在一切紧致集上均匀收敛的拓扑.

**证** 设 $u\in W^{m,p}(R^n)$. 将定理 3.3 及 3.4 应用于导数 $D^ju$，而 $|j|=k$.

**注 3.1** 当 $p=2$ 时，利用 Fourier 变换能给出定理 3.5 的一个很简单的直接证明. 设 $f\in L^2(R^n)$，用 $\hat{f}$ 表示它的 Fourier 变换，而 $x$ 的对偶变数是 $\xi$，于是，若 $u\in W^{m,2}(R^n)=H^m(R^n)$，其变换 $\hat{u}$ 可验证满足(等价性条件)

$$(1+|\xi|)^m\hat{u}\in L^2(R^n).$$

于是，

$$\xi^j\hat{u}=\xi^j(1+|\xi|)^{-m}(1+|\xi|)^m\hat{u}\in L^1(R^n),$$

若 $\xi^j(1+|\xi|)^{-m}\in L^2(R^n)$，因此若 $|j|<m-n/2$ 成立，因此(注意到 $(D^ju)^\wedge=(2\pi i\xi)^j\hat{u}$)，导致对 $|j|<m-n/2$，$D^ju$ 是连

续的且在无穷远为零（作为一个可和函数的 Fourier 变换），由此得到结果.

## 4. $W^{m,p}(\Omega)$的性质，延拓（第一方法）

现在来看能否推广 N°2 及 3 的性质到空间 $W^{m,p}(\Omega)$，$\Omega\neq R^n$.

引入

**定义 4.1** 相对于$\Omega$及$p$的 $m$ **延拓算子**是一$W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,p}(R^n)$的线性连续算子 $P$（若它存在），使

$Pu=u$ 在 $\Omega$ 上对一切 $u\in W^{m,p}(\Omega)$几乎处处成立.

**定义 4.2** 开集 $\Omega$ **称为很正规**，若其边界 $\Gamma$ 是$n-1$维的无穷可微的流形，$\Omega$ 在 $\Gamma$ 的一侧.

用 $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$表示在 $\overline{\Omega}$ 中无穷可微且在 $\overline{\Omega}$ 中有紧致支集的函数空间.

我们来证明

**命题 4.1** 设 $\Omega$ 是很正规的，于是 $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密.

**证** 1）如同在第一章命题 4.2 的证明中那样，证明若 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，则 $M_Ru\to u$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$中成立，因此，能假设 $u$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是紧致支集.

2）设 $\{Q_i,\ \varphi_i\}$，$i=1,\ \cdots,\ \nu,\ \cdots$是定义 $\Gamma$ 的局部覆盖.因此：$Q_i$ 是 $R^n$ 的一个开集；用 $Q$ 表示在 $R^n_y$ 中的开集

$$\begin{cases}0<y_i<1,\ i=1,\ \cdots,\ n-1;\\ -1<y_n<1,\end{cases}$$

$\varphi_i$ 是一个由 $Q_i$ 到 $Q$ 上的无穷可微的映射，使 $\varphi_i^{-1}$ 存在且设从 $Q$ 到 $Q_i$ 为无穷可微，且 $\varphi_i$ 映照 $Q_i\cap\Omega$ 到 $Q_+=Q\cap\{y_n>0\}$ 上，

映照 $Q_i\cap\Gamma$ 到 $\Sigma=Q\cap\{y_n=0\}$上，自然假设在这些 $\{Q_i,\ \varphi_i\}$ 之间满足相容性条件.

设 $\theta_i$ 是从属于 $\{Q_i\}$ 的一个1的分解，且 $\theta_i\in\mathscr{D}(Q_i)$.

于是可写

$$(4.1)\qquad u=u_0+\sum_{i=1}^{N}\theta_i u,$$

于此 $u_0$ 在 $\Gamma$ 的邻域中 $\equiv 0$, 且于此当 $u$ 在 $\bar{\Omega}$ 中是紧致支集时 $\theta_i u$ 的作和是有限的.

由正规性立刻看出 $u_0$ 是 $\mathscr{D}(\Omega)$中的函数在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的极限($u_0\in W_0^{m,p}(\Omega)$)，且因此只需考虑一个函数 $\theta_i u$.

为书写简单起见删去指标"$i$".

用下式定义 $v$:

$$(4.2)\qquad v(y)=(\theta u)(\varphi^{-1}(y)),\ y\in Q_+.$$

那就有一个函数，有下面的性质:

$$(4.3)\qquad \begin{cases} v\in W^{m,p}(Q_+), \\ v\equiv 0 \text{ 在 } \partial Q_+-\Sigma \text{ 的邻域中成立} \end{cases}$$

($\partial Q_+=Q_+$ 的边界).

只须证明在此条件下 $v$ 是 $\mathscr{D}(\bar{Q}_+)$中的一个函数序列在 $W^{m,p}(Q_+)$中的极限，这些函数序列中的函数在 $\partial Q_+-\Sigma$ 的邻域 $\equiv 0$.

3) 置:

$$(4.4)\qquad w_a(y)=v(y',\ y_n+a),\ a>0,$$

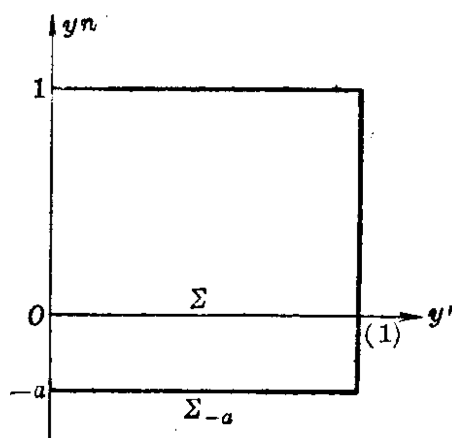
于此

$$y'=(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1}).$$

(4.4)对于 $y_n>-a$ 有意义; 用 $v_a$ 表示 $w_a$ 在 $Q_+$ 上的限制. 下面，我们将验证

**引理 4.1** 当 $a\to 0$ 时，$v_a\to v$ 在 $W^{m,p}(Q_+)$中成立.

暂时承认此引理. 可见除 2) 中所作的假设外, 可以假设 $v$ 是一个函数 $w \in W^{m,p}(Q_{-a})$ 在 $Q_+$ 上的限制, 于此 $Q_{-a}=\Sigma\times]-a, 1[$, 而 $w$ 在 $\partial Q_{-a}-\Sigma_{-a}$ 的邻域中 $\equiv 0$ (参见图).




但设 $\psi$ 是 $y_n$ 的一个函数, 无穷可微, 当 $y_n\geqslant 0$ 时 $=1$, 而当 $y_n\leqslant -a/2$ 时 $=0$. 于是 $v$ 还是 $\psi w$ 在 $Q_+$ 上的限制, 而现在在 $\partial Q_{-a}$ 的邻域中 $\psi w\equiv 0$, 因此 $\psi w=\lim\limits_j \Phi_j$ 在 $W^{m,p}(Q_{-a})$ 中成立, 而 $\Phi_j\in\mathscr{D}(Q_{-a})$, 且在 $\partial Q_{-a}$ 的一个(固定的)邻域中 $\equiv 0$.

若 $\varphi_j=\Phi_j$ 在 $Q_+$ 上的限制, 有

$$v=\lim_j \varphi_j \text{ 在 } W^{m,p}(Q_+) \text{ 中成立,}$$

且 $\varphi_j$ 有所要求的性质.

因此留下来仅仅是作引理 4.1 的验证.

**证** 有 $D^j w_a(y)=(D^j w)(y', y_n+a)$, $|j|\leqslant m$, 且 $D^j v_a=D^j w_a$ 在 $Q_+$ 的限制.

因此只需证明: 对 $f\in L^p(Q_+)$, 设 $g_a$ 由

$$g_a(y)=\begin{cases} f(y', y_n+a), & -a<y_n<1-a, \\ 0 & , 1-a<y_n<1 \end{cases}$$

所(p. p.)定义, 且 $f_a=g_a$ 在 $Q_+$ 上的限制, 于是在 $L^p(Q_+)$ 中 $f_a\to f$, 这从平移在 $L^p(R^n)$ 中是连续的事实得到.

命题 4.1 证毕.

现在能证明

**定理 4.1** 设 $\Omega$ 是很正规的(定义 4.2). 于是, 对任何 $m$, 存在一个 $k$ 延拓算子 $P$ (相对于 $\Omega$ 及 $p$), 对于 $0\leqslant k\leqslant m$

成立.

**证** 1) 证明存在一线性算子 $P$, 使对于一切 $u\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$, 有

(4.5) $$\|Pu\|_{W^{k,p}(R^n)}\leqslant C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},\ 0\leqslant k\leqslant m,$$

及

(4.6) $$Pu=u \text{ 在 } \Omega \text{ 上成立.}$$

此结果于是由连续性由延拓而随之得到(由于命题 4.1).

用 1 的分解(如同命题 4.1 的证明), 引回到 $u$ 是在 $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ 中, 且支集在 $\bar{Q}_i\cap\bar{\Omega}$ 的情况(命题 4.1 的证明中的记号).

于是采取局部化, 全部重新着手为: 设 $v\in\mathscr{D}(\bar{Q}_+)$, 在 $\partial Q_+-\Sigma$ 的邻域中 $\equiv 0$; 构造一线性算子 $P$ 使

(4.7) $$\begin{cases}\|Pv\|_{W^{k,p}(R^n)}\leqslant C\|v\|_{W^{k,p}(Q_+)},\ 0\leqslant k\leqslant m,\\ Pv=v \text{ 在 } Q_+ \text{ 上成立.}\end{cases}$$

也能很好地假设 $v$ 给定在 $\mathscr{D}(\bar{G})$ 中, 于此

$$G=\{y\,|\,y_n>0\}\ (\text{在 } G-Q_+ \text{ 中用 } 0 \text{ 来延拓 } v).$$

于是必须证明(4.7), 而用 $G$ 来代替 $Q_+$.

2) 定义 $Pv$ 如下:

(4.8) $$Pv(y)=\begin{cases}v(y) & \text{当 } y_n>0 \text{ 时},\\ \sum_{j=1}^{m}C_jv(y',\ -jy_n) & \text{当 } y_n<0 \text{ 时},\end{cases}$$

于此 $C_j$ 是由下式定义的常数:

(4.9) $$\sum_{j=1}^{m}(-j)^kC_j=1,\ \text{对 } k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-2,\ m-1$$

(这很好地定义了 $C_j$), 于是 $Pv\in W^{m,p}(R^n)$, 且有不等式(4.7)(用 $G$ 代替 $Q_+$), 由此得到定理.

**注 4.1** 自然地, 定理 4.1 的结果对 $m$ 固定, 假设 $\Gamma$ 是 $m$ 次连续可微, $\Omega$ 在 $\Gamma$ 的一侧的情形是适用的(同样证明).

**结论** 当 $\Omega$ 是很正规时，对 $W^{m,p}(\Omega)$ 的元素的性质的研究归结为对 $W^{m,p}(R^n)$ 的元素的性质的研究；特别，能应用 N°2 及 3 的结果.

## 5. 延拓(第二方法)

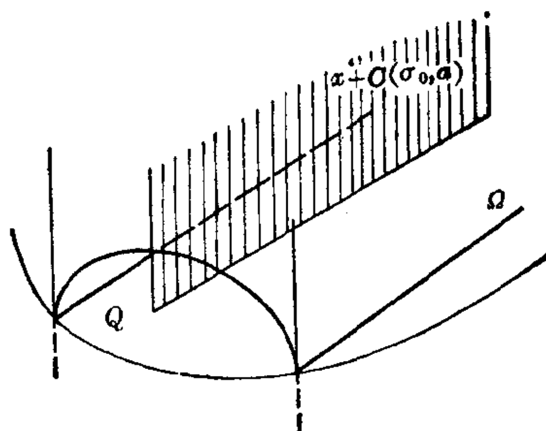
### 5.1 Sobolev 恒等式

用 $S_{n-1}$ 表示 $R^n$ 中的球 $|\sigma|=1$; $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, $(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)^{1/2}=|\sigma|$; $d\omega(\sigma)$ 表示在 $S_{n-1}$ 上的曲面的测度; $C(\sigma_0, \alpha)$ 表示用 $y=t\sigma$, $0\leqslant t<\infty$, $|\sigma-\sigma_0|<\alpha$, $\sigma$, $\sigma_0\in S_{n-1}$ 描写的圆锥.

设 $u\in\mathscr{D}(\overline{\Omega})$, $\Omega$ 是——暂时——很正规的(参见 N°4).

假设:

(5.1) $\begin{cases} u \text{ 在 } \overline{\Omega} \text{ 中紧致支集，且支集“足够小”使得存在} \\ \text{一个圆锥 } C(\sigma_0, \alpha)\text{，使对在 } u \text{ 的支集的一个邻} \\ \text{域 } Q \text{ 中的一切 } x,\ x+C(\sigma_0, \alpha) \text{ 不截割 } Q\cap\Gamma. \\ \text{(参见图).} \end{cases}$




我们约定在集合

$$\bigcap_{x\in Q}\{x+C(\sigma_0, \alpha)\}-\overline{\Omega}$$

中用 0 来延拓 $u$，致使按此约定有

$$(5.2)\quad \int_0^\infty t^{m-1}\frac{d^m}{dt^m}u(x+t\sigma)dt=(-1)^m(m-1)!u(x),$$
$$x\in Q,\ |\sigma-\sigma_0|<\alpha.$$

于是设 $\sigma\to f(\sigma)$ 是在 $S_{n-1}$ 上的无穷可微函数，而支集在由 $|\sigma-\sigma_0|<\alpha$ 所定义的集合中，满足

$$(5.3)\qquad \int_{S_{n-1}}f(\sigma)d\omega(\sigma)=(-1)^m(m-1)!$$

用 $f(\sigma)d\omega(\sigma)$ 乘(5.2)，在 $S_{n-1}$ 上积分(或在 $|\sigma-\sigma_0|<\alpha$ 上积分)，且将 $\frac{d^m}{dt^m}u(x+t\sigma)$ 用其值来替代，得到

$$(5.4)\quad u(x)$$
$$=\sum_{|j|=m}\int_0^\infty t^{m-1}dt\int_{|\sigma-\sigma_0|<\alpha}D^ju(x+t\sigma)\sigma^jf(\sigma)d\omega(\sigma).$$

置 $t\sigma=y$; $|y|=t$, $\sigma=y/|y|$, $dy=t^{n-1}dt\,d\omega(\sigma)$; 于是

$$u(x)=\sum_{|j|=m}v_j(x)$$

于此

$$v_j(x)=\int_{C(\sigma_0,\alpha)}D^ju(x+y)\frac{y^j}{|y|^n}f\left(\frac{y}{|y|}\right)dy.$$

置

$$(5.5)\qquad g_j(y)=\frac{y^j}{|y|^n}f\left(\frac{y}{|y|}\right),$$

我们得到 Sobolev 表达公式:

$$(5.6)\qquad \begin{cases} u(x)=\sum_{|j|=m}v_j(x),\\ v_j(x)=\int_{C(\sigma_0,\alpha)}D^ju(x+y)g_j(y)dy.\end{cases}$$

注意，公式对一切满足(5.1)的 $u$ 适用.

**注 5.1** 自然地，当 $\Omega$ 是很正规时，对"足够小"的开集 $Q$ 而言，锥 $C(\sigma_0,\alpha)$ 的存在性是立刻得到的. 诚然，表达式

(5.6)的类型可推广到下述开集 $\Omega$ 的情况: 对于 $\Omega$ 存在用开集 $Q$ 作成的 $\Gamma$ 的一个有限局部覆盖, 而对 $Q$, 锥 $C(\sigma_0, \alpha)$ 存在(自然,锥 $C(\sigma_0, \alpha)$ 可以依赖于 $Q$!). 这是有**"锥性质"的开**集(在通行的术语下).

## 5.2 到延拓的映射

以一般的方式, 若 $g\in L^p(\Omega)$, 用 $\tilde{g}$ 表示 $g$ 在 $R^n$ 上的延拓,在 $\Omega$ 之外为 0; $\tilde{g}\in L^p(R^n)$.

我们来证明

**定理 5.1** 设 $u$ 有性质(5.1), 联系于它一定义在 $R^n$ 中的函数 $Pu$: $Pu=\Phi Qu$, 于此

$$(5.7)\qquad Qu(x)=\sum_{|j|=m}\int_{R^n}(D^ju)^{\sim}(x+y)g_j(y)dy,$$

且于此 $\Phi\in\mathscr{D}(R^n)$, 在 $u$ 的支集的一邻域中 $=1$.

函数 $Pu$ 满足:

$$(5.8)\qquad Pu=u \quad \text{在 } \Omega \text{ 上成立},$$

$$(5.9)\qquad \|Pu\|_{W^{m,p}(R^n)}\leqslant C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

而 $C=$ 与 $u$ 无关的常数.

在证明此定理之前先做两个注:

**注 5.2** 这个定理重新给出(参见定理 4.1 的证明)事实: 若 $\Omega$ 是很正规的, 它有 $m$ 延拓的性质(对 $L^p$). 这同样更加多地证明了: 有锥性质 (参见注 5.1) 的开集 $\Omega$ 有 $m$ 延拓的性质.

**注 5.3** 与定理 4.1 的证明的 2) 中所给出的方法不同, 现在的方法是联系于 $m$ 且对 $k<m$ 没有价值, 这是和前面的注矛盾的,即与考虑到 N°4 的方法的一个议论相反的.

**证** 性质(5.8)从公式(5.6)得到.

**置**

$$w_j(x)=\int_{R^n}(D^ju)^{\sim}(x+y)g_j(y)dy;$$

若此处用下式来定义 $k_j$:

$$k_j(x)=g_j(-x),$$

于是

(5.10) $$w_j=k_j*(D^ju)^{\sim}.$$

我们要验证：若 $|l|=m$, 则

(5.11) $$\begin{cases}D^lw_j\in L^p(R^n) \text{ 且}\\ \|D^lw_j\|_{L^p(R^n)}\leqslant C\|D^ju\|_{L^p(\Omega)}.\end{cases}$$

暂时承认这一点，由此容易得到(也能得到更精细的结果，参见下面的 N°) $w_j$ 是局部地在 $W^{m,p}(R^n)$中，因此 $\Phi w_j\in W^{m,p}(R^n)$且可得

$$\|\Phi w_j\|_{W^{m,p}(R^n)}\leqslant C\sum_{|j|=m}\|D^ju\|_{L^p(\Omega)},$$

由此得到(5.9)，因为 $Pu=\sum_{|j|=m}\Phi w_j$.

因此剩下来要证明(5.11). 这是 Caldéron-Zygmund 奇异积分定理的一个应用. 事实上，用 $D^lk_j(x)$表示函数 $k_j(x)$的通常导数，$x\in R^n-\{0\}$. 由于 $k_j$ 的表示式($k_j(x)=g_j(-x)$及(5.5))，对 $|l|=m$, $D^lk_j$ 是一个 $-n$ 阶的确定的齐次函数，而对于应用 Caldéron-Zygmund 定理的决定性之点是验证

(5.12) $$\int_{|\sigma|=1}D^lk_j(\sigma)d\omega(\sigma)=0,\ |l|=m.$$

事实上

$$D^l=\frac{\partial}{\partial x_s}D^r\quad |r|=m-1,$$

以致

$$\int_{1<|x|<R_0} D^l k_j(x)\, dx = \int_{S_{n-1}} D^r k_j(R_0\sigma)\sigma_\beta d\omega(R_0\sigma)$$
$$-\int_{S_{n-1}} D^r k_j(\sigma)\sigma_\beta d\omega(\sigma).$$

但因为 $D^r k_j$ 是齐 $-n+1$ 次的,

$$D^r k_j(R_0\sigma)d\omega(R_0\sigma) = D^r k_j(\sigma)d\omega(\sigma),$$

由此

$$\int_{1<|x|<R_0} D^l k_j(x)dx = 0.$$

但此积分也等于$C\int_{|\sigma|=1} D^l k_j(\sigma)\, d\omega(\sigma)$, $C\neq 0$, 由此得到(5.12)式.

于是设 $(D^l k_j)_\varepsilon$, $\varepsilon>0$ 是用

$$(D^l k_j)_\varepsilon(x) = \begin{cases} D^l k_j(x) & 若|x|\geqslant\varepsilon, \\ 0 & 若|x|<\varepsilon \end{cases}$$

所定义的函数,于是可证明(Calderón-Zygmund),当 $\varepsilon\to 0$ 时 $(D^l k_j)_\varepsilon \to K_j$ 在广义函数意义下成立,且用 $K_j$ 所作的卷积算子在 $L^p$ 中有界,由此得到(5.11)式.

定理 5.1 证毕.

## 6. 一 些 注 记

**6.1** 首先我们来给出与 N°3 同一类型的一些性质,但都是局部的性质.

**定理 6.1** 设 $T$ 是 $R^n$ 中的一广义函数,使

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} \in L^p(R^n),\quad i=1, \cdots, n. \tag{6.1}$$

于是若 $n>p$, $T$ 几乎处处等于一个函数,仍记为 $T$, 使

(6.2) $$T\in L^q_{\text{loc}}(R^n),\ \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}.$$

(与 N°3 的结果不同，对 $T$ 未作任何假设；任何整体的结论不可能：取 $T=-1$！)

**证** 利用 Laplace 算子 $\Delta$ 的一个基本解:

(6.3) $$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)=C\delta,\ C=\text{常数},\ \delta=\text{在原点质量为}1.$$

(若 $n=2$, 用对数势来作标准的修改.)

设 $\gamma\in\mathscr{D}(R^n)$，在原点的一邻域中 $=1$. 于是，由(6.3)得到

(6.4) $$\Delta\left(\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right)=C\delta+\xi,\quad \xi\in\mathscr{D}(R^n),$$

且在(6.4)中所涉及的一切广义函数是紧致支集，可取与$T$ 的卷积，得到

(6.5) $$CT+\xi*T=\Delta\left(\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right)*T=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right)*\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

因为 $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right)\in L^1(R^n)$，由此可导得

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right)*\frac{\partial T}{\partial x_i}\in L^p(R^n).$$

且因此($\xi*T$ 是无穷可微的！)由(6.5)就证得 $T\in L^p_{\text{loc}}$.

因此，$\Omega$ 例如说是一个球，$T\in L^p(\Omega)$ 且 $\frac{\partial T}{\partial x_i}\in L^p(\Omega)$；因为 $\Omega$ 有 1-延拓的性质（参见 N°4 及 5），可导得（根据 N°3）$T\in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$, 这就证明了(6.2).

**注 6.1** 在广义函数 $T$ 其一切 $m$ 阶导数在 $L^p$ 中的情况，拓广无新的困难.

**6.2** 现证明第一章的定理 6.2.

用 $W_{\text{loc}}^{\mu,p}$ 表示 $R^n$ 中的函数 $u$ 的空间，使 $u \in W^{\mu,p}(\Omega)$ 对 $R^n$ 中的一切有界开集 $\Omega$ 成立.

假设 $X$ 是 $[m;\ p']$ 极，且必须证明当

$$\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{m-1}{2n} \tag{6.6}$$

时，它是 $[1;\ p]$ 极.

因此设 $T \in W_X^{-1,p}$; 应该证明 $T=0$. 总可以回复到 $T$ 是紧致支集的情况. 因为 $X$ 是 $[m; p']$ 极，只须证明 $T \in W_X^{-m,p'}$，且为此只须证明 $T \in W^{-m,p'}(R^n)$，因此

$$|\langle T,\ u\rangle| \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}},\ u \in \mathscr{D}(R^n). \tag{6.7}$$

但是

$$\langle T,\ u\rangle = \langle T,\ \Phi u\rangle,$$

于此 $\Phi \in \mathscr{D}(R^n)$，在 $T$ 的支集的邻域中 $=1$，因此

$$|\langle T,\ u\rangle| \leqslant C\|\Phi u\|_{W^{1,p'}} \quad (\text{因为 } T \in W^{-1,p}).$$

因此若能证明

$$W^{m,p}(R^n) \subset W_{\text{loc}}^{1,p'},\ \text{具连续嵌入}, \tag{6.8}$$

则就能成立(6.7)式. 但是，由 N°3 的结果，总有

$$W^{m,p}(R^n) \subset W_{\text{loc}}^{1,q},$$

于此

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m-1}{n} \tag{6.9}$$

$$\left(\text{或若 } \frac{1}{p} - \frac{m-1}{n} \leqslant 0,\ q \text{ 是任意有限数}\right),$$

因此，若由(6.9)给出的 $q$ 满足 $q \geqslant p'$，就有(6.8)，而此条件等价于(6.6)，因此就证明了定理.

## 7. 紧致性的结果

现在来证明

**定理 7.1** 设 $\Omega$ 是一个很正规的有界开集. $W^{1,p}(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中的嵌入是紧致的.

**证** 1) 已知(N°4)若 $u\in W^{1,p}(\Omega)$, 于是 $u\in L^q(\Omega)$, 而当 $n>p$ 时, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{n}$; 当 $n\leqslant p$ 时, $q$ 为任意有限数.

现在要证明比前述的少许多一些, 即证明: $W^{1,p}(\Omega)$ 在 $L^{q_1}(\Omega)$ 中的嵌入是紧致的, 于此若 $n>p$, $q_1=q-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ 任意, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{n}$; 而当 $n\leqslant p$ 时, $q_1$ 为任意有限数.

2) 设 $B$ 是 $W^{1,p}(\Omega)$ 中的单位球, 为了指出它在 $L^{q_1}(\Omega)$ 中是紧致的, 必须证明:

(i) 对一切 $\varepsilon_1>0$, 存在一个紧致集 $K\subset\Omega$ 使

$$\int_{CK}|u|^{q_1}dx\leqslant\varepsilon_1 \text{ 对一切 } u\in B \text{ 成立.}$$

(ii) 对一切 $\varepsilon_1>0$, 存在一个 $\eta$ 使对于

$$|h|=(h_1^2+\cdots+h_n^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\eta, \text{ 有}$$

$$\|\tau_h\tilde{u}-\tilde{u}\|_{L^{q_1}(R^n)}\leqslant\varepsilon_1 \text{ 对一切 } u\in B \text{ 成立,} \tag{7.1}$$

于此

$$\tilde{u}=u \text{ 的延拓, 在 } \Omega \text{ 之外为 } 0,$$

$$\tau_hf(x)=f(x-h)=f(x_1-h_1,\ \cdots,\ x_n-h_n).$$

3) (i) 的验证:

$$\int_{CK}|u|^{q_1}dx\leqslant\left(\int_{CK}|u|^q dx\right)^{1/\rho}\left(\int_{CK}dx\right)^{1/\rho'},$$

于此

$$q_1\rho=q,\quad \frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=1.$$

因为$\int_{CK}dx=\mathrm{mes}(\Omega\cap CK)$能被选择得任意小，就得到结果.

4) (ii) 的验证:

首先选择一紧致集 $K\subset\Omega$ 使

(7.2) $\qquad \|u\|_{L^{q_1}(CK)}\leqslant\varepsilon_1/3$ 对 $u\in B$ 成立;

根据 3), 一个如此的 $K$ 是存在的.

再设 $K_1$ 是一个紧致集 $\subset\Omega$, 使 $K_1\supset K$, 并设 $\eta_1$ 使对 $x\in CK_1$, $|h|\leqslant\eta_1$ 有 $x-h\in CK$. 于是，对$|h|\leqslant\eta_1$，将有

(7.3) $\qquad \|\tau_h\tilde{u}\|_{L^{q_1}(CK_1)}\leqslant\varepsilon_1/3,\quad u\in B.$

现若 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, 在 $K_1$ 上 $=1$, 且 $\psi=1-\varphi$,

$$\|\tau_h\tilde{u}-\tilde{u}\|_{L^{q_1}(R^n)}\leqslant\|\tau_h(\varphi\tilde{u})-\varphi\tilde{u}\|_{L^{q_1}(R^n)}+\|\tau_h\psi\tilde{u}\|_{L^{q_1}(R^n)}+\|\psi\tilde{u}\|_{L^{q_1}(R^n)};$$

根据(7.2), (7.3)，这两个最后的量 $\leqslant\varepsilon_1/3$.

因此，剩下来要证明对$|h|\leqslant\eta_2$，有

(7.4) $\qquad \|\tau_h v-v\|_{L^{q_1}(R^n)}\leqslant\varepsilon_1/3,\quad v=\varphi\tilde{u},\ u\in B.$

但

(7.5) $$\|\tau_h v-v\|_{L^1(R^n)}\leqslant|h|\,\|v\|_{W^{1,1}(G)}\leqslant C|h|\,\|v\|_{W^{1,p}(G)},$$

于此 $G=$包含 $\tau_h\overline{\Omega}$, 例如说 $|h|\leqslant1$, 的有界开集.

可是一般说

$$\int|f|^{q_1}dx\leqslant\left(\int|f|^{q_1\theta\rho}dx\right)^{1/\rho}\left(\int|f|^{q_1(1-\theta)\rho'}dx\right)^{1/\rho'},$$

于此 $q_1\theta\rho=1$, $q_1(1-\theta)\rho'=q$ (由此 $\theta q_1(q-1)=q-q_1$). 对 $f=\tau_h v-v$ 应用上式并利用(7.5)，得到

$$\|\tau_h v-v\|_{L^{q_1}}\leqslant C|h|^\theta,$$

由此取$C|h|^\theta\leqslant\varepsilon_1/3$就得到(7.4). 这就完成了定理的证明.

## 关于第二章的注记

N°1–3 包含很重要的 Sobolev 不等式的证明，这儿我们遵循 E. Gagliardo, Propriétà di alaene classi di funzioni in piǹ variabili, Ricerche di Mat., Vol VII (1958), p. 102～137 的叙述方式（而且给出 Sobolev 不等式的某些补充）.

事实上，Sobolev 定理是关联于（由 $1/|x|^{\lambda}$ 组合而成的）势定理的性质，它隐含着正文中的不等式. Gagliardo 的证明允许直接地得到对空间 $W^{m,p}$ 的结论. 对于第一个观点的发展，特别可参看 Thorin, Zygmund, Caldéron-Zygmund 的工作.

N°4 的证明方法，定理 4.1 的点 2）难于决定其来源；在 Aronszajn 及 Smith 的文章中，见 Bessel Potentials, Part II, 将在 Annales Inst. Fourier 上发表，他们将此方法归功于 Lichtenstein, 但未能给出一精确的参考文献.

N°5 的证明方法，点 5.2 是由于 A. P. Caldéron, Lebesque spaces of differentiable functions and distributions, Proc. of Symp. in Pure Maths., A. M. S., Vol. IV, 1961, p. 33～49. 我们没有力求精确化对开集边界所作的假设；对于此类的问题——对 $p=2$——我们回到 Aronszajn-Smith, 上文.

用于 N°6 的方法，对 6.1, 是由于 L. Schwartz, Théorie des distributions, t. II. 导数在 $L^p(\Omega)$ 中的广义函数的空间是 Beppo-Levi 型空间，对 $p=2$, 参见 J. Deny-J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo-Levi, Annales Inst. Fourier, t. V, (1955), p. 305～370.

定理 7.1 的结果是由于 Kondrachoff, 参见已列出的 Sobolev 的书. 对于 $\Omega$ 的边界的假设我们在那儿也没有精确化. 对 $p=2$, 参见 Deny-Lions 的上文，对 $p$ 任意，参见 Gagliardo 的上文.

# 第 3 章

# 迹 定 理

## 1. 一个基本结果

记号将如下. 对 $x=(x_1, \cdots, x_n)\in R^n$, 置 $x'=(x_1, \cdots, x_{n-1})$, 致使 $x=(x', x_n)$.

**定理1.1** 设 $p<n$. 设 $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$, 有

$$(1.1)\quad \|\varphi(x', 0)\|_{L^{q_1}}\leqslant\left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^{1/q_1}\|D_n\varphi\|_{L^p}^{1/q_1}\|\varphi\|_{L^q}^{1-1/q_1},$$

于此

$$(1.2)\qquad \frac{1}{q_1}=\frac{1}{p}-\frac{1-1/p}{n-1},\quad \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}.$$

(自然地 $\|\varphi(x', 0)\|_{L^{q_1}}=\left(\int_{R^{n-1}}|\varphi(x', 0)|^{q_1}dx'\right)^{1/q_1}$.)

**证** 回忆第二章的(2.3)式, 于是

$$|\varphi(x)|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^{\frac{(n-1)p}{n-p}-1}|D_n\varphi|dx_n.$$

在点 $x=(x', 0)$ 利用此式, 得到

$$\int|\varphi(x', 0)|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}dx'\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{(p-1)n}{n-p}}|D_n\varphi|dx'dx_n$$

$$\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\left(\int_{R^n}|D_n\varphi|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{R^n}|\varphi|^{\frac{n(p-1)p'}{n-p}}dx\right)^{1/p'}.$$

但 $\qquad \dfrac{n(p-1)p'}{n-p}=\dfrac{np}{n-p}=q \quad$ 及 $\quad \dfrac{(n-1)p}{n-p}=q_1,$

由此

$$\left(\int |\varphi(x',0)|^{q_1} dx'\right)^{1/q_1} \leqslant \left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^{1/q_1} \|D_n\varphi\|_{L^p}^{1/q_1} \|\varphi\|_{L^q}^{q/p'q_1}.$$

由此注意到 $\frac{q}{p'q_1}=1-\frac{1}{q_1}$，就得到结果.

**系 1.1** 设 $p<n$. $\mathscr{D}(R^n)\to\mathscr{D}(R^{n-1})$ 的映射

$$\varphi\to\varphi(x',0) \tag{1.3}$$

由连续性可延拓为 $D^{1,p}(R^n)\to L^{q_1}(R^{n-1})$ 的一个线性连续映射 $u\to u(x',0)$，而 $q_1$ 由(1.2)给出.（$D^{1,p}(R^n)$ 的定义见第二章.）

**证** 这是(1.1)及事实

$$\|\varphi\|_{L^q}\leqslant C\|\varphi\|_{D^{1,p}}$$

(第二章，定理 2.1)的直接结论.

**定义 1.1** 对 $u\in D^{1,p}(R^n)$，函数

$$x'\to u(x',0)$$

称为 $u$ 在超平面 $x_n=0$ 上的迹.

**系 1.2** 设 $p<n$. 映射(1.3)可用连续性延拓为 $W^{1,p}(R^n)\to L^{q_1}(R^{n-1})$ 的一个线性连续映射.

**证** 因为 $W^{1,p}(R^n)\subset D^{1,p}(R^n)$ 而显然.

**系 1.3** 设 $p<n$ 且 $\Omega$ 很正规(第二章定义 4.2). 对 $\varphi\in\mathscr{D}(\overline{\Omega})$，用 $\gamma_0\varphi$ 表示 $\varphi$ 在 $\Omega$ 的边界 $\Gamma$ 上的迹. 由 $\mathscr{D}(\overline{\Omega})\to\mathscr{D}(\Gamma)$ 的映射 $\varphi\to\gamma_0\varphi$ 由连续性可延拓为由 $W^{1,p}(\Omega)\to L^{q_1}(\Gamma)$ 的一个线性连续映射 $u\to\gamma_0 u$.

**证** [回忆到——第二章命题 4.1——$\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中稠密].

通过局部化可回到系 1.2.

**注 1.1** 在前面的叙述中我们显然能减弱对 $\Omega$ 的边界所作的正规性假设！

**注 1.2** 如同将看到的，映射 $u\to\gamma_0 u$ 不是从 $W^{1,p}(\Omega)\to L^{q_1}(\Gamma)$ 上的映射.

我们的目的现在是精确地决定当 $u$ 遍历 $W^{1,p}(\Omega)$ 时，由 $\gamma_0 u$ 所遍历的空间.

## 2. 一个一般问题的叙述

**2.1** 我们总是可回到半空间的情况，因此，例如说，取 $u\in W^{1,p}(\Omega)$，于此 $\Omega=\{x|x_n>0\}$.

我们来分离变量. 若 $u\in W^{1,p}(\Omega)$，可视其为一个函数

$$x_n\to u(0,\ x_n), \tag{2.1}$$

于此 $u(0,\ x_n)=\text{“}x'\to u(x',\ x_n)\text{”}$

(所有这些函数是几乎处处定义的). 以一般的方式，若 $F$ 是一个 Banach 空间，用

$$L^p(a,\ b;\ F)$$

表示由 $(a,\ b)\to F$ 的函数 $t\to f(t)$，在 $F$ 上强可测，使

$$\left(\int_a^b \|f(t)\|_F^p dt\right)^{1/p}<\infty$$

的函数(类)的空间.

上面的量于是是 $f$ 在 $L^p(a,\ b;\ F)$ 中的模.

于是，我们将下面命题的验证留给读者作为习题.

**命题 2.1** 下面的两个条件是等价的:

(i) $u\in W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega=\{x|x_n>0\}$;

(ii) $\begin{cases} u(\cdot,\ x_n)\in L^p(0,\ \infty;\ W^{1,p}(R_{x'}^{n-1})), \\ \dfrac{d}{dx_n}u(\cdot,\ x_n)\in L^p(0,\ \infty;\ L^p(R_{x'}^{n-1})). \end{cases}$

$u$ 的迹于是是函数 $u(\cdot,\ x_n)$ 在 $(x_n)$ 的原点的值.

这允许将迹的问题放到一个更一般(且更方便)的场合中.

**2.2** 为简化书写,置 $x_n=t$.

设 $A$ 及 $B$ 是两个 Banach 空间, $A\subset B$, $A$ 在 $B$ 中的嵌入是连续的[例: $A=W^{1,p}(R^{n-1})$, $B=L^p(R^{n-1})$].

考虑一个函数 $u$ 使

$$u\in L^p(0,\ \infty;\ A)\quad\left(\text{即}\left(\int_0^\infty \|u(t)\|_A^p dt\right)^{1/p}<\infty\right), \tag{2.2}$$

且

$$\frac{du}{dt}\in L^p(0,\ \infty;\ B). \tag{2.3}$$

[这意味着: 存在 $f\in L^p(0,\ \infty;\ B)$, 使对一切数量函数 $\varphi\in\mathscr{D}(]0,\ \infty[)$, 有

$$-\int_0^\infty u(t)\varphi'(t)\,dt=\int_0^\infty f(t)\varphi(t)\,dt, \tag{2.4}$$

于此这些积分在 $B$ 中取值].

迹的问题于是如下:

1) 对满足(2.2)及(2.3)的 $u$, 能否定义 $u(0)$? [$u(0)$将是 $u$ 的迹.]

2) 当 $u$ 满足(2.2)及(2.3)而变化时, 能否刻划由 $u(0)$ 所遍历的空间的特性?

**2.3** 事实上,引入一个稍许更一般一些的问题是有益的(且这不使随之而来的证明复杂化).

设 $p$ 及 $\alpha$ 是两个实数,且

$$1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{2.5}$$

用 $W(p,\ \alpha;\ A,\ B)$表示使

(2.6) $$t^\alpha u \in L^p(0, \infty; A)$$

及

(2.7) $$t^\alpha \frac{du}{dt} \in L^p(0, \infty; B)$$

的函数 $u$ 的(类)的空间.

[这意味着: 存在 $f$ 使得 $t^\alpha f \in L^p(0, \infty; B)$, 且对一切函数 $\varphi \in \mathscr{D}(]0, \infty[)$, 有(2.4)式.]

装配以模

(2.8) $$\max\left( \| t^\alpha u \|_{L^p(0, \infty; A)},\ \left\| t^\alpha \frac{du}{dt} \right\|_{L^p(0, \infty; B)} \right),$$

我们把证明 $W(p, \alpha; A, B)$ 是一个 Banach 空间留作练习.

**引理 2.1** 满足 (2.6)、(2.7) 的一切函数 $u$ 是(几乎处处等于)一个由 $t>0 \to B$ 的连续函数.

证 设 $B'$ 是 $B$ 的对偶.

对 $g \in L^p(0, \infty; B)$ 或 $L^p_{loc}(0, \infty; B)$, 且对一切 $b' \in B'$, 定义数量函数 $\langle g, b' \rangle (t \to \langle g(t), b' \rangle)$, 它在 $L^p(0, \infty)$ 或 $L^p_{loc}(0, \infty)$ 中.

置 $\frac{du}{dt} = f$, 且对几乎所有的 $t$ 引入

(2.9) $$v(t) = u(t) - \int_1^t f(\sigma) d\sigma.$$

于是 $\langle v, b' \rangle \in L^p_{loc}(0, \infty)$; 在 $]0, \infty[$ 上按广义函数的意义计算其导数. 对 $\varphi \in \mathscr{D}(]0, \infty[)$, 有

$$\langle \frac{d}{dt} \langle v, b' \rangle, \varphi \rangle = -\langle \langle v, b' \rangle, \varphi' \rangle$$

$$= -\langle \langle u, \varphi' \rangle, b' \rangle + \langle \int_1^t \langle f(\sigma), b' \rangle d\sigma, \varphi' \rangle$$

于此

$$\langle u, \varphi' \rangle = \int_0^\infty u(t) \varphi'(t) dt.$$

因此根据(2.4)成立

$$\langle \frac{d}{dt}\langle v,\ b'\rangle,\ \varphi\rangle = \langle -\langle u,\ \varphi'\rangle - \langle f,\ \varphi\rangle,\ b'\rangle = 0.$$

因此 $\langle v,\ b'\rangle$ 与 $t$ 无关，因此几乎处处对 $t$ 成立 $v(t)=b$ 在 $B$ 中为固定．由此，几乎处处对 $t$ 成立

$$u(t)=b+\int_1^t f(\sigma)\,d\sigma. \tag{2.9'}$$

这就证明了引理．

**引理 2.2** 设 $u$ 满足(2.6)，(2.7)．若设

$$\frac{1}{p}+\alpha<1, \tag{2.10}$$

那末当 $t\to 0$ 时，$u(t)$ 在 $B$ 中收敛．

由定义将取

$$u(0)=\lim_B u(t),\ t\to 0; \tag{2.11}$$

$u(0)$ 是 $u$ 的迹．

**证** 由(2.9′)推得

$$u(t)-u(s)=\int_s^t f(\sigma)\,d\sigma=\int_s^t \frac{du}{d\sigma}(\sigma)\,d\sigma$$

$$=\int_s^t \sigma^\alpha\frac{du}{d\sigma}\sigma^{-\alpha}d\sigma,$$

由此得到

$$\|u(t)-u(s)\|_B\leqslant\left(\int_s^t\left\|\sigma^\alpha\frac{du}{d\sigma}\right\|_B^p d\sigma\right)^{1/p}\left(\int_s^t\sigma^{-\alpha p'}\,d\sigma\right)^{1/p'}.$$

由(2.10)，积分 $\int_0^t \sigma^{-\alpha p'}d\sigma<\infty$，由上式就得到结果．

**定义 2.1** 假设 (2.10) 成立，用 $T(p,\ \alpha;\ A,\ B)$ 表示当 $u$ 遍历 $W(p,\ \alpha;\ A,\ B)$ 时由 $u(0)$ 所遍历的空间．

这是 $W(p,\ \alpha;\ A,\ B)$ 的迹空间．

装备以模

$$\|a\|_T = \inf_{u \in W} \|u\|_W, \tag{2.12}$$

$$u(0) = a$$

这是一个 Banach 空间(练习).

在随后的几节中,对空间 $A$, $B$ 的某些对,我们要刻划空间 $T(p, \alpha; A, B)$的特征.

## 2.4

**引理2.3** $W(p, \alpha; A, B)$中的由 $t>0 \to A$ 的无穷可微的函数的空间 $\mathscr{W}$ 是在 $W(p, \alpha; A, B)$中稠密的.

**证** 设 $u \in W(p, \alpha; A, B) = W$. 置 $t = e^{\tau}$, $u(e^{\tau}) = \tilde{u}(\tau)$.

于是(容易证实),若置

$$\frac{1}{p} + \alpha = \theta, \tag{2.13}$$

可见 $u \in W$ 等价于

$$e^{\theta\tau}\tilde{u} \in L^p(-\infty, +\infty; A) = L^p(A), \tag{2.14}$$

$$e^{(\theta-1)\tau}\frac{d\tilde{u}}{d\tau} \in L^p(B). \tag{2.15}$$

现设 $\rho_n$ 是一个正规序列,且设

$$\tilde{u}_n = \rho_n * \tilde{u},$$

有

$e^{\theta\tau}\tilde{u}_n \to e^{\theta\tau}\tilde{u}$ 在 $L^p(A)$中成立,

$e^{(\theta-1)\tau}\dfrac{d\tilde{u}_n}{d\tau} \to e^{(\theta-1)\tau}\dfrac{d\tilde{u}}{d\tau}$ 在 $L^p(B)$中成立,

因此,由 $u_n(t) = \tilde{u}_n(\log t)$定义的 $u_n$ 在 $W$ 中收敛于 $u$,且 $u_n$ 由 $t>0 \to A$ 是无穷可微的.

## 3. 对半群的某些回顾

**3.1** 设 $E$ 是一个 Banach 空间.

称满足下述条件的一族算子 $G(t)$, $t\geqslant 0$ 为 $E$ 中的**半群**:

(i) $G(t)\in L(E;E)$,

(ii) $G(0)=I$(恒等元),

(iii) $G(t)G(s)=G(t+s)$对一切 $t$, $s\geqslant 0$ 成立,

(iv) 对一切 $e\in E$, 函数 $t\to G(t)e$ 由 $t\geqslant 0\to E$ 是连续的.

若能取 $t$ 及 $s$ 任意的符号,那末就有一个群.

**练习 1** 对 $f\in L^p(R)$, 用

$$G(t)f(x)=f(x+t)$$

定义 $G(t)f$. 证明 $G(t)$对 $1\leqslant p<\infty$ 是一个群.

**练习 2** 存在 $M$ 及 $\omega$ 使

$$\|G(t)\|\leqslant Me^{\omega t},\ t\geqslant 0. \tag{3.1}$$

**3.2** 对 $e\in E$, 函数$t\to G(t)e$一般不是可导的. 用 $D(A)$表示可导的向量的集合, 即使 $t\to G(t)e$ 对 $t\geqslant 0$ 为可导的 $e\in E$ 的集合. 注意到 (iii), 有

$$D(A)=\{e\,|\,e\in E,\ \frac{G(h)e-e}{h}\text{ 当 }h\to 0\text{ 时在 }E\text{ 中收敛}\}.$$

**练习 3** $D(A)$在 $E$ 中稠密.

[实际上,对 $\varphi\in\mathscr{D}_0(0,\infty)=$ 在 $t\geqslant 0$ 中无穷可微、在原点

其一切导数为0、紧致支集的函数，及$\xi\in E$，$G(\varphi)\cdot\xi=\int_0^\infty G(t)\xi\cdot\varphi(t)dt$；证明

(a) $G(\varphi)\cdot\xi$ 的集合在 $E$ 中稠密；

(b) $G(\varphi)\cdot\xi\in D(\Lambda)$].

**定义 3.1** 对 $e\in D(\Lambda)$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(h)e-e}{h}=\Lambda e. \tag{3.2}$$

**练习 4** 对练习1的情况，证明

$$D(\Lambda)=W^{1,p}(R),\ \Lambda=\frac{d}{dx}.$$

**定义 3.2** $\Lambda$ 是半群 $G(t)$ 的无穷小生成元.

## 3.3 $\Lambda$ 的性质

下面的一些结果是基本的.

**定理 3.1** 算子 $\Lambda$ 有下述性质:

(3.3) $\Lambda$ 在稠密的定义域 $D(\Lambda)$ 上是闭的.

(3.4) $-\Lambda+p$ 对 $\xi>\omega(p=\xi+i\eta)$ 是可逆的;

$$\|(-\Lambda+p)^{-n}\|\leqslant\frac{M}{(\xi-\omega)^n}, n=1, 2, \cdots, \xi>\omega. \tag{3.5}$$

注意：常数 $M$ 及 $\omega$ 是在(3.1)中所涉及到的常数.

**定理 3.2** (逆定理) 若 $\Lambda$ 是一个满足 (3.3), (3.4), (3.5)的算子，则它是一个满足(3.1)的唯一的半群 $G(t)$ 的无穷小生成元.

若 $\Lambda$ 是一群的无穷小生成元，那末 $\Lambda$ 及 $-\Lambda$ 是一半群

的无穷小生成元(必要充分条件).

注意: 条件

$$\|(-\Lambda+p)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\xi-\omega},\ \xi>\omega, \tag{3.6}$$

显然隐含着(3.5). 条件(3.6)是在应用中最有用的条件.

### 3.4 半群及 Cauchy 问题

**定理 3.3** 设 $a$ 在 $D(\Lambda)$ 中给定, 而 $f$ 从 $t\geqslant0\rightarrow E$ 连续地给定. 存在一个函数 $t\rightarrow u(t)$ 且仅存在一个函数满足下面的性质:

$$\begin{cases} t\rightarrow u(t) & \text{从 } t\geqslant0\rightarrow D(\Lambda)\text{ 是连续的,} \\ t\rightarrow u(t) & \text{从 } t\geqslant0\rightarrow E\text{ 是一次连续可微;} \end{cases} \tag{3.7}$$

$$-\Lambda u(t)+u'(t)=f(t),\ u'(t)=\frac{du(t)}{dt}, \tag{3.8}$$

$$u(0)=a. \tag{3.9}$$

其解由

$$u(t)=G(t)a+\int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \tag{3.10}$$

所明显地给出.

问题(3.7), (3.8), (3.9)是一个联系于算子 $-\Lambda+\dfrac{d}{dt}$ 的 Cauchy 问题.

注意: $D(\Lambda)$ 被装配以图象的模:

$$\|e\|_{D(\Lambda)}=\|e\|+\|\Lambda e\| \tag{3.11}$$

(于此$\|\ \ \|=E$ 中的模), 它实际上是一个 Banach 空间(因为 $\Lambda$ 是闭的).

## 4. 一个不等式

现在来证明

**定理 4.1** 若 $f$ 使

$$\int_0^\infty t^{\alpha p}|f(t)|^p dt<\infty.$$

设

(4.1) $$\frac{1}{p}+\alpha<1.$$

于是,若置

(4.2) $$g(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(\sigma)d\sigma,$$

就有

(4.3) $$\left(\int_0^\infty t^{\alpha p}|g(t)|^p dt\right)^{1/p}\leqslant\frac{1}{1-\left(\frac{1}{p}+\alpha\right)}\left(\int_0^\infty t^{\alpha p}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

**证** 置 $t=e^\tau$, $f(e^\tau)=\tilde{f}(\tau)$. 于是

$$\tilde{g}(\tau)=e^{-\tau}\int_{-\infty}^\tau \tilde{f}(e^\sigma)e^\sigma d\sigma.$$

因此若由

$$X(\tau)=\begin{cases}0 & \text{若 } \tau<0,\\ e^{-\tau} & \text{若 } \tau>0,\end{cases}$$

来引入 $X$, 那末

(4.4) $$\tilde{g}=X*\tilde{f}.$$

条件"$t^\alpha f\in L^p(0,\infty)$"等价于"$e^{\theta\tau}\tilde{f}\in L^p(-\infty,+\infty)=L^p$",而 $\frac{1}{p}+\alpha=\theta$, 且所要证明的不等式是

(4.5) $$\|e^{\theta\tau}\tilde{g}\|_{L^p}<\frac{1}{1-\theta}\|e^{\theta\tau}\tilde{f}\|_{L^p}.$$

但根据(4.4)式,

$$e^{\theta\tau}\tilde{g}=(e^{\theta\tau}X)*(e^{\theta\tau}\tilde{f}),$$

致使成立

(4.6) $$\|e^{\theta\tau}\tilde{g}\|_{L^p}\leqslant\|e^{\theta\tau}X\|_{L^1}\|e^{\theta\tau}\tilde{f}\|_{L^p}.$$

由此因为

$$\|e^{\theta\tau}X\|_{L^1}=\frac{1}{1-\theta},$$

就得到(4.5).

**注 4.1** 因为 $e^{\theta\tau}X(\tau)\geqslant 0$, $\dfrac{1}{1-\theta}$ 是在 (4.6) 中因而是在(4.3)中的最佳的常数.

## 5. 迹定理(1 阶)

**5.1** 设 $E$ 是一个 Banach 空间, $G(t)$ 是一个有界半群:

$$\|G(t)\|\leqslant M,\ t\geqslant 0. \tag{5.1}$$

设 $\Lambda$ 是 $G(t)$ 的无穷小生成元. 在本节中我们来刻划空间 $T(p,\ \alpha;\ D(\Lambda),\ E)$ (N°2 的记号)的特征.

**定理 5.1** 设 $0<\dfrac{1}{p}+\alpha<1$. 在假设(5.1)成立时, 空间 $T(p,\ \alpha;\ D(\Lambda),\ E)$ 与 $a\in E$ 使

$$\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\|G(t)a-a\|^p dt<\infty \tag{5.2}$$

的空间重合.

模 $\|a\|_{T(p,\alpha;D(\Lambda),E)}$ 与

$$\|a\|+\left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\|G(t)a-a\|^p dt\right)^{1/p}=|\!|\!| a |\!|\!| \tag{5.3}$$

是等价的.

**5.2** 定理 5.1 的证明(第一部分).

设 $u\in W\ (p,\ \alpha;\ D(\Lambda),\ E)$. 必须证明 $u\ (0)=a$ (它有意义, 参见引理 2.2) 满足(5.2).

首先假设 $u\in \mathscr{W}$ (引理 2.3 的记号). 置:

$$(5.4)\qquad -\Lambda u+u'=f.$$

由定理 3.3，对 $t\geqslant\varepsilon>0$ 可得

$$u(t)=G(t-\varepsilon)u(\varepsilon)+\int_\varepsilon^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma,$$

由此得到

$$(5.5)\qquad G(t-\varepsilon)u(\varepsilon)-u(\varepsilon)=\int_\varepsilon^t u'(\sigma)d\sigma-\int_\varepsilon^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

但当 $\varepsilon\to0$ 时，$\int_\varepsilon^t u'(\sigma)d\sigma\to\int_0^t u'(\sigma)d\sigma$,

$$\int_\varepsilon^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma\to\int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma,$$

$u(\varepsilon)\to u(0)$ (由定义!),

因此(5.5)给出

$$(5.6)\qquad G(t)u(0)-u(0)=\int_0^t u'(\sigma)d\sigma-\int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma,\ u\in\mathscr{W}.$$

现设 $u\in W$, $u=\lim u_n$, $u_n\in\mathscr{W}$, 且(5.6)对于每个 $u_n$ 为有效的，可以在(5.6)中过渡到极限. 因此最后得到

若 $u\in W$; $u(0)=a$; 有关系式

$$(5.7)\begin{cases} t^{-1}(G(t)a-a)=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t u'(\sigma)d\sigma-\dfrac{1}{t}\int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma,\\ -\Lambda u+u'=f.\end{cases}$$

由此得到(利用(5.1))

$$\|t^{-1}(G(t)a-a)\|\leqslant\frac{1}{t}\int_0^t\|u'(\sigma)\|d\sigma+\frac{M}{t}\int_0^t\|f(\sigma)\|d\sigma.$$

由此，利用定理 4.1 就得到

$$(5.8)\qquad \left(\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\|G(t)a-a\|^p dt\right)^{1/p}$$
$$\leqslant\frac{1}{1-\theta}\left(\int_0^\infty t^{\alpha p}\|u'(t)\|^p dt\right)^{1/p}$$
$$+\frac{M}{1-\theta}\left(\int_0^\infty t^{\alpha p}\|-\Lambda u+u'\|^p dt\right)^{1/p}.$$

这就证明了(5.2)，且也证明了

$$(5.9)\qquad |||a|||\leqslant C\|a\|_{T(p,\alpha;D(\Lambda),E)}.$$

**5.3** 定理 5.1 的证明(第二部分).

现设 $a$ 满足 $|||a|||<\infty$, 必须证明

$$a\in T(p,\ \alpha;\ D(\Lambda),\ E).$$

为此，引入

$$(5.10)\qquad v(t)=\frac{1}{t}\int_0^t G(\sigma)a d\sigma$$

及

$$(5.11)\qquad \begin{cases} u(t)=q(t)v(t); \\ q\text{——}C^1\text{ 函数},\ q(0)=1,\ t\geqslant 1\text{ 时 } q\equiv 0. \end{cases}$$

若设 $a\in D(\Lambda)$, 那末

$$(5.12)\qquad \Lambda v(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \Lambda G(\sigma)a d\sigma$$
$$=\frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{d\sigma}G(\sigma)a d\sigma=\frac{G(t)a-a}{t},$$

且过渡到极限，此关系式对一切 $t>0$ 及一切 $a\in E$ 有效. 因此

$$\Lambda u(t)=q(t)t^{-1}(G(t)a-a),$$

且因此，由于(5.2)式有

$$(5.13)\qquad t^\alpha \Lambda u\in L^p(0,\ \infty;\ E).$$

此外因为

$$\|v(t)\| \leqslant M\|a\|,$$

可以看到若 $t^{\alpha}q \in L^{p}(0, \infty)$，即若 $-\alpha p<1$，因此若

$$\frac{1}{p}+\alpha>0,$$

就有

$$t^{\alpha}u \in L^{p}(0, \infty; E).$$

其次

$$u' = q'v+qv',$$

显然 $t^{\alpha}q'v \in L^{p}(0, \infty; E)$ ($\alpha$ 任意)，且若能证明

(5.14) $$t^{\alpha}v' \in L^{p}(0, \infty; E),$$

就将有

$$t^{\alpha}u' \in L^{p}(0, \infty; E),$$

但是

$$v'(t) = \frac{1}{t} G(t)a - \frac{1}{t^2}\int_0^t G(\sigma) a d\sigma$$
$$= \frac{1}{t}(G(t)a-a) - \frac{1}{t^2}\int_0^t (G(\sigma)a-a)d\sigma;$$

由假设

$$t^{\alpha}\left(\frac{1}{t}(G(t)a-a)\right) \in L^{p}(0, \infty; E),$$

且利用定理 4.1(用 $\alpha-1$ 来代替 $\alpha$)有

$$t^{\alpha}\left(\frac{1}{t^2}\int_0^t (G(\sigma)a-a)d\sigma\right) \in L^{p}(0, \infty; E).$$

由此得到(5.14)且因而 $u \in W$. 因为 $u(0)=a$, 可看到 $a \in T(p, \alpha; D(A), E)$. 加之 $\|u\|_W \leqslant C |||a|||$, 由此得到

$$\|a\|_{T(p, \alpha; D(A), E)} \leqslant C |||a|||.$$

这连同(5.9)达到了定理的证明(自然，由闭图象定理也能得到模的等价性的结论).

**注 5.1** $\frac{1}{p}+\alpha>0$ 的假设仅仅对于证明 $t^\alpha u\in L^p(0, \infty; E)$ 才被涉及.

## 5.4 定理 5.1 的拓广.

从应用的观点稍许拓广一下定理 5.1 是必要的, 设 $\Lambda_1\cdots, \Lambda_\nu$ 是半群 $G_1(t), \cdots, G_\nu(t)$ 的无穷小生成元的一个族, 而这些半群满足条件:

$$\|G_j(t)\|\leqslant M_j,\ j=1, \cdots, \nu, \tag{5.15}$$

$$G_i(s)G_j(t)=G_j(t)G_i(s)\quad 对一切 i,\ j;\ st\geqslant 0. \tag{5.16}$$

置

$$D(\Lambda)=\prod_{j=1}^{\nu} D(\Lambda_j), \tag{5.17}$$

它对模

$$\|e\|_{D(\Lambda)}=\|e\|+\sum_{j=1}^{\nu}\|\Lambda_j e\| \tag{5.18}$$

而言是一个 Banach 空间(证明作为练习).

于是有下述结果:

**定理 5.2** 设 $0<\frac{1}{p}+\alpha<1$, 那末 $T(p, \alpha; D(\Lambda), E)$ 与 $a\in E$ 使

$$N(a)=\left(\sum_{i=1}^{\nu}\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\|G_i(t)a-a\|^p dt\right)^{1/p}<\infty$$

的空间重合.

模 $\|a\|_T$ 及 $\|a\|+N(a)$ 是等价的.

**证** 与证明定理 5.1 一样, 仅仅 $v(t)$ 的选择 (参见 (5.10)) 稍许不同, 这儿取

$$v(t)=H_1(t)\cdots H_\nu(t)a, \tag{5.20}$$

$$H_j(t)=\frac{1}{t}\int_0^t G_j(\sigma)d\sigma$$

# 6. 例(I)

采用 N° 5.4 的记号,我们取

$$E=L^p(R^n),\ 1<p<\infty,$$

$$\Lambda_j=\partial/\partial x_j,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

$G_j(t)$ 由

$$G_j(t)f(x)=f(x_1,\ \cdots,\ x_{j-1},\ x_j+t,\ x_{j+1},\ \cdots,\ x_n)$$
$$=f(\cdots,\ x_j+t,\ \cdots)$$

定义. 于是由(5.17)所给出的 $D(\Lambda)$ 是 $W^{1,p}(R^n)$, 且定理5.2 给出:

**定理 6.1** 下述两个条件是等价的:

(i) $f\in T(p,\ \alpha;\ W^{1,p}(R^n),\ L^p(R^n))$,

(ii) $\begin{cases} f\in L^p(R^n), \\ \int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\left(\int_{R^n}|f(\cdots,x_j+t,\cdots)-f(x)|^p dx\right)dt<\infty, \\ j=1,\ \cdots,\ n. \end{cases}$

由定义置

$$T(p,\ \alpha;\ W^{1,p}(R^n),\ L^p(R^n))=W^{1-\theta,p}(R^n), \tag{6.1}$$

于此

$$\frac{1}{p}+\alpha=\theta. \tag{6.2}$$

将能取

$$\|f\|W^{1-\theta,p}=\Big(\|f\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n\int_0^\infty t^{(\alpha-1)p}\int_{R^n}|f(\cdots,\ x_j+t,\ \cdots)-f(x)|^p dxdt\Big)^{1/p} \tag{6.3}$$

作为模.

**特殊情况** 对 $\alpha=0$, 上述结果给出:

若 $u\in W^{1,p}(R^n_x\times(0,\infty))$，那末迹 $u(x,0)\in W^{1-1/p,p}(R^n)$，映射 $u\to u(x,0)$ 是连续的且在上的.

**注 6.1** 应用定理 1.1(用 $n+1$ 代替 $n$)，由此可导得：

$$\text{若 } p<n+1,\ W^{1-1/p,p}(R^n)\subset L^{q_1}(R^n),\ \frac{1}{q_1}=\frac{1}{p}-\frac{1-1/p}{n}.$$

**练习** 考察情况 $p=2$；

1) 证明

$$u\in W^{\frac{1}{2},2}=H^{\frac{1}{2}}(R^n)\Leftrightarrow(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}\hat{u}\in L^2(R^n_\xi),$$

于此 $\hat{u}=u$ 的 Fourier 变换.

2) (利用 Fourier 变换)给出定理 6.1 的一个直接的证明.

## 7. 例(II)

取 $E=R$ 上的连续函数，周期为1；若 $f\in E$，$\|f\|=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$；将写：$E=C^0$；

$$A=d/dx;$$

$$G(t)=\text{平移群},$$

$$D(A)=f\in E \text{ 且 } \frac{df}{dx}\in E \text{ 的空间；写：} D(A)=C^1.$$

在此情况应用定理 5.1，而 $p=\infty$，得到：

**定理 7.1** 下述两个条件是等价的：

(i) $f\in T(\infty,\alpha;C^1,C^0)$；

(ii) $f\in C^0$ 及 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x+t)-f(x)|\leqslant ct^{1-\alpha}$.

满足(ii)的 $f$ 的空间记为 $\mathrm{Lip}_{1-\alpha}$，因此

$$T(\infty,\alpha;C^1,C^0)=\mathrm{Lip}_{1-\alpha}. \tag{7.1}$$

# 8. 迹定理(2 阶)

**8.1** 仍设 $E$ 是一个 Banach 空间，$G(t)$ 是 $E$ 中的一个有界半群，其无穷小生成元为 $\Lambda$.

用 $D(\Lambda^2)$ 表示 $e\in D(\Lambda)$ 使 $\Lambda e\in D(\Lambda)$ 的空间；装备以模

$$\|e\|+\|\Lambda e\|+\|\Lambda^2 e\|,$$

它是一 Banach 空间.

用同样的方式逐渐定义 $D(\Lambda^k)$.

**练习** 证明 $D(\Lambda^k)$ 在 $E$ 中稠密($k$ 为任意整数).

用 $W_2(p, \alpha)$ 表示，使

$$t^\alpha u\in L^p(0,\ \infty;\ D(\Lambda^2)), \tag{8.1}$$

$$t^\alpha \frac{du}{dt}\in L^p(0,\ \infty;\ D(\Lambda)), \tag{8.2}$$

$$t^\alpha \frac{d^2u}{dt^2}\in L^p(0,\ \infty;\ E) \tag{8.3}$$

成立的函数 $u$ 的(类)的空间.

将假设

$$1\leqslant p\leqslant\infty,\quad 0<\frac{1}{p}+\alpha<1. \tag{8.4}$$

对 $W_2(p, \alpha)$ 装备以模

$$\|t^\alpha u\|_{L^p(0,\ \infty;D(\Lambda^2))}+\left\|t^\alpha \frac{du}{dt}\right\|_{L^p(0,\ \infty;D(\Lambda))} +\left\|t^\alpha \frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L^p(0,\ \infty;E)},$$

它实际上是一个 Banach 空间.

可以利用定理 5.1. 由(8.1)，(8.2)得到

$$t^{\alpha}\Lambda u \in L^p(0, \infty; D(\Lambda)),$$
$$t^{\alpha}(\Lambda u)' \in L^p(0, \infty; E),$$

由此得到 $\Lambda u(0) \in T(p, \alpha; D(\Lambda), E)$.

置

$$T(p, \alpha; D(\Lambda), E) = T(p, \alpha), \tag{8.5}$$

且用 $T_1(p, \alpha)$ 表示 $e \in D(\Lambda)$ 使

$$\Lambda e \in T(p, \alpha)$$

的空间. 置

$$\|e\|_{T_1(p, \alpha)} = \|e\|_{D(\Lambda)} + \|\Lambda e\|_{T(p, \alpha)}, \tag{8.6}$$

它使 $T_1(p, \alpha)$ 成为一 Banach 空间.

以这些记号,

$$u(0) \in T_1(p, \alpha)$$

而定理 5.1 还给出 $u'(0) \in T(p, \alpha)$. 因此:

**定理 8.1** 映射

$$u \to \{u(0), u'(0)\} \tag{8.7}$$

是由 $W_2(p, \alpha)$ 到 $T_1(p, \alpha) \times T(p, \alpha)$ 中的连续映射.

在下一段将证明

**定理 8.2** 映射(8.7)是在上的.

**注 8.1** 对于使

$$t^{\alpha}u \in L^p(0, \infty; D(\Lambda^m)), \cdots, t^{\alpha}\frac{d^m u}{dt^m} \in L^p(0, \infty; E)$$

成立的 $u$ 的空间 $W_m(p, \alpha)$ 的类似的结果, 我们留给读者来作细心的叙述(及轻快的证明——参见注记中的文献).

可象 N°5 中 5.4 那样拓广到有限个数目的半群的情况.

**8.2** 定理 8.2 的证明:

1) 设 $\{a_1, a\} \in T_1(p, \alpha) \times T(p, \alpha)$, 假设能构造函

数 $u_1$, $u$ 属于 $W_2(p, \alpha)$，使得

$$u_1(0)=a_1,\ u_1'(0)\ \text{任意}, \tag{8.8}$$

$$u'(0)=a,\ u(0)\ \text{任意}. \tag{8.9}$$

于是函数

$$w(t)=-u_1(t)+2u_1\left(\frac{t}{2}\right)+2\left(u(t)-u\left(\frac{t}{2}\right)\right) \tag{8.10}$$

满足 $w(0)=a_1$, $w'(0)=a$ 且 $w\in W_2(p, \alpha)$. 因此，为了证明定理只需证明能构造 $u_1$ 及 $u$ 满足(8.8)及(8.9)式.

2) 仅来构造 $u_1$($u$ 的构造用类似的方法得到).

设

$$Y_k(t)=\begin{cases}0, & \text{若 } t<0,\\ \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}, & \text{若 } t>0,\end{cases} \tag{8.11}$$

$$v(t)=t^{-2}Y_1*G*Ga_1. \tag{8.12}$$

可写出

$$\begin{aligned} v=t^{-2}(&Y_1*G*(G-Y_1)a_1\\ &+Y_2*(G-Y_1)a_1+Y_3a_1), \end{aligned} \tag{8.13}$$

由此出发能证实

$$v(0)=\frac{a_1}{2}. \tag{8.14}$$

有

$$\Lambda v(t)=t^{-2}Y_1*G*G\cdot\Lambda a_1,$$

接着

$$\Lambda^2v(t)=t^{-2}G*(G-Y_1)\cdot\Lambda a_1$$

(利用 $Y_1*G\Lambda=(G-Y_1)$). 由此得到

$$\|\Lambda^2v(t)\|\leqslant\frac{M}{t^2}\int_0^t\|G(\sigma)\Lambda a_1-\Lambda a_1\|d\sigma,$$

由此(利用事实 $\Lambda a_1\in T(p, \alpha)$ 及定理 4.1)得到

(8.15) $$t^{\alpha}\in L^{p}(0,\ \infty;\ E).$$

接着

$$\begin{aligned}\Lambda v' &= t^{-2}G*G\cdot\Lambda a_1-2t^{-3}Y_1*G*G\cdot\Lambda a_1\\ &= t^{-2}G*(G-Y_1)\Lambda a_1+t^{-2}Y_1*(G-Y_1)\Lambda a_1+t^{-2}Y_2\cdot\Lambda a_1\\ &\quad -2t^{-3}Y_1*G*(G-Y_1)\Lambda a_1-2t^{-3}Y_2*(G-Y_1)\Lambda a_1\\ &\quad -2t^{-3}Y_3\Lambda a_1,\end{aligned}$$

及

$$t^{-2}Y_2\Lambda a_1-2t^{-3}Y_3\Lambda a_1=0.$$

由此得到

(8.16) $$t^{\alpha}\Lambda v'\in L^{p}(0,\ \infty;\ E).$$

现在计算 $\frac{d^2v}{dt^2}$. 利用事实 $G=Y_1+Y_1*\Lambda G$, 可写出

$$\begin{aligned}v &= t^{-2}Y_2*Ga_1+t^{-2}Y_2*G*G\cdot\Lambda a_1\\ &= t^{-2}Y_3\cdot a_1+\underbrace{t^{-2}Y_3*G\cdot\Lambda a_1}_{v_1}+\underbrace{t^{-2}Y_2*G*G\cdot\Lambda a_1}_{v_2}.\end{aligned}$$

由此得到 $$v''=v_1''+v_2''.$$

现在证明

(8.17) $$t^{\alpha}v_1''\in L^{p}(0,\ \infty;\ E).$$

($t^{\alpha}v_2''\in L^{p}(0,\ \infty;\ E)$ 的证明留作练习——同样方法). 有

$$\begin{aligned}v_1'' &= t^{-2}Y_1*G\cdot\Lambda a_1-4t^{-3}Y_2*G\cdot\Lambda a_1+6t^{-4}Y_3*G\cdot\Lambda a_1\\ &= t^{-2}Y_1*(G-Y_1)\Lambda a_1+t^{-2}Y_2\Lambda a_1-4t^{-3}Y_2*(G-Y_1)\Lambda a_1\\ &\quad -4t^{-3}Y_3\Lambda a_1+6t^{-4}Y_3*(G-Y_1)\Lambda a_1+6t^{-4}Y_4\Lambda a_1.\end{aligned}$$

但 $t^{-2}Y_2\Lambda a_1-4t^{-3}Y_3\Lambda a_1+6t^{-4}Y_4\Lambda a_1=0$, 且利用定理 4.1, 就导得(8.17).

所求得的函数 $u_1$ 将是

$u_1(t)=2q(t)v(t)$, $q(0)=1$, $q$ 二次连续可微且有紧致支集.

**8.3** 一个注：设 $a_1 \in T(p, \alpha)$（不是 $T_1(p, \alpha)$）．

那末任何由(8.12)给定的函数 $v$ 满足

$$t^\alpha \Lambda v \in L^p(0, \infty; E),$$

$$t^\alpha v' \in L^p(0, \infty; E).$$

由此导得：

存在一个线性映射

$$a \to Pa$$

从 $T(p, \alpha) \to W_1(p, \alpha)$ $(=W\ (p, \alpha))$ 及从 $T_1(p, \alpha) \to W_2(p, \alpha)$ 连续，使

$$(Pa)(0) = a. \tag{8.18}$$

（这可以拓广：可以选择 $P$ 满足(8.18)式，且从 $T_k(p, \alpha) \to W_{k+1}(p, \alpha)$ 为连续，$0 \leqslant k \leqslant m$，$m$ 任意整数）．

# 9. 例(III)

在 N°6 的条件中应用N°8.

用 $W^{1+\rho, p}(R^n)$，$0<\rho<1$，表示 $u \in W^{1,p}(R^n)$ 使 $D_i u \in W^{\rho, p}(R^n)$（由(6.1)定义）的空间.

于是，特别若 $u \in W^{2,p}(R^n_x \times R_t)$，有

$$u(x, 0) \in W^{2-1/p, p}(R^n_x), \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \in W^{1-1/p, p}(R^n_x), \tag{9.2}$$

映射 $u \to \{u(x, 0), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)\}$ 是线性连续且在上的.

**注 9.1** 将定义 $W^{s,p}(R^n)$，$s>0$ 任意实数及对 $u \in W^{m,p}(R^n_x \times R_t)$ 叙述类似于上面的结果的细节留给读者.

## 10. 插值的性质

**10.1** 重新着手 N°2, 2.3 的一般情况.

设 $A_*$, $B_*$ 是第二对 Banash 空间, 而 $A_* \subset B_*$.

**定理 10.1** 设 $\Pi$ 是由 $B$ 到 $B_*$ 中的一个线性连续算子, 又同样是由 $A$ 到 $A_*$ 中的线性连续算子. 于是 $\Pi$ 是由 $T(p, \alpha; A, B)$ 到 $T(p, \alpha; A_*, B_*)$ 中的一个线性连续算子, 不管 $p$, $\alpha$ 如何, 只要满足 $0<\frac{1}{p}+\alpha<1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

**证** 设 $a \in T(p, \alpha; A, B)=T$; 于是——由定义——存在 $u \in W(p, \alpha; A, B)=W$, 而 $u(0)=a$.

函数

$$v(t)=\Pi u(t)$$

是在 $W(p, \alpha; A_*, B_*)=W_*$ 中, 因此 $v(0) \in T_*$, 且 $v(0)=\Pi a$.

其次

$$\|\Pi a\|_{T*} \leqslant \|v\|_{W_*} \leqslant C\|u\|_W,$$

因此

$$\|\Pi a\|_{T_*} \leqslant C \inf_{\substack{u \in W \\ u(0)=a}} \|u\|_W=C\|a\|_T.$$

由此得到定理.

**10.2** 应用

取

$$A=A_*=W^{1,p}(R^n),$$
$$B=B_*=L^p(R^n),$$

$\Pi=$ 由 $M \in W^{1,\infty}(R^n)$ 形成的乘法算子; 有 $\Pi \in \mathscr{L}(A; A_*)$ 及

$\mathscr{L}(B, B_*)$. 定理 10.1 于是给出:

**系 10.1** 对 $M \in W^{1,\infty}(R^n)$, $u \to Mu$ 是由 $W^{\rho,p}(R^n) \to W^{\rho,p}(R^n)$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, 的线性连续映射.

对 $p$ 为任意实数, $M \in \mathscr{D}(R^n)$(例如说), 有类似的结果.

## 11. $W^{m,p}(\Omega)$ 的迹

**11.1** 设 $\Omega$ 是一个很正规的开集(参见第二章定义 4.2). 对实数 $s>0$, 借助于局部化, 并利用系 10.1 可定义 $W^{s,p}(\Gamma)$.

**11.2** 于是有

**定理 11.1** 对 $u \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, 置

$$\gamma_j u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial n^j}\right|_{\Gamma}.$$

由 $\mathscr{D}(\overline{\Omega}) \to \prod_{j=0}^{m-1} \mathscr{D}(\Gamma)$ 的映射

$$u \to \gamma u = \{\gamma_0 u, \cdots, \gamma_{m-1} u\}, \tag{11.1}$$

由连续性可延拓为由

$$W^{m,p}(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-1/p,p}(\Gamma)$$

的线性连续映射, 仍记为 $u \to \gamma u$. 此映射是在上的.

**11.3** 现在证明

**定理 11.2** $\gamma$ 的核(即 $u \in W^{m,p}(\Omega)$ 且使 $\gamma u = 0$ 的 $u$ 的集合)与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 重合.

**证** 1) 显然, 若 $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, 那末 $\gamma u = 0$.

现来对 $m=1$ 证明其逆(为了稍许简化一些).

2) 借助于局部化, 可回到 $\Omega$ 是一个半空间的情况. ——

于是所要证明的结果是下述特殊情况：

考虑(参见 N°2) $W(p, \alpha; A, B)=W$，而 $0<\frac{1}{p}+\alpha<1$，且用 $W_0$ 表示在 $W$ 中在 0 的邻域为零的函数的集合.

于是，若 $u\in W$ 且 $u(0)=0$，有 $u\in\overline{W}_0$.

事实上，设 $q_n$ 用下式定义：

$$q_n(t)=\left\{0,\ \text{若 } t\leqslant\frac{1}{n};\ 2n\left(t-\frac{1}{n}\right),\ \text{若 } \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\frac{3}{2n};\right.$$

$$\left.2n\left(\frac{2}{n}-t\right),\ \text{若 } \frac{3}{2n}\leqslant t\leqslant\frac{2}{n};\ 0,\ \text{若 } t\geqslant\frac{2}{n}\right\},$$

且

$$u_n=q_nu.$$

于是在 $W$ 中 $u_n\to u$. 对此，要证明的本质之点是

(11.2) $\quad t^\alpha q_n'u\to 0$ 在 $L^p(0, \infty; B)$ 中成立，若 $n\to\infty$，因此

$$x_n=n^p\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}t^{\alpha p}\|u(t)\|_B^p dt\to 0,\ \text{若 } n\to\infty. \tag{11.3}$$

但，因为 $u(0)=0$，

$$u(t)=\int_0^t u'(\sigma)\,d\sigma=\int_0^t\sigma^\alpha u'(\sigma)\sigma^{-\alpha}d\sigma,$$

因此

$$\|u(t)\|_B^p\leqslant\left(\int_0^t\|\sigma^\alpha u'(\sigma)\|_B^p d\sigma\right)\left(\int_0^t\sigma^{-\alpha p'}d\sigma\right)^{p/p'}.$$

由此得到

$$x_n\leqslant cn^p\int_0^{2/n}\|t^\alpha u'(t)\|_B^p\,dt\int_{1/n}^{2/n}t^{\alpha p+\frac{p}{p'}(-\alpha p'+1)}dt$$

$$\leqslant c_1\int_0^{2/n}\|t^\alpha u'(t)\|_B^p\,dt\to 0,\ \text{若 } n\to\infty.$$

因为在 0 的邻域 $u_n=0$，这证明了我们的断言.

# 关于第三章的注记

比 N°2 所述的更一般的迹空间已为 J. L. Lions 在下文中所引入: Sur les espaces d'interpolation; dualité, Math. Scand. 9(1961), p. 167～177. 在那儿决定了迹空间的对偶.

在 B. T. Poulsen, Math. Scand. 1962, Boundary values in function spaces 中将发现比引理 2.2 更一般的许多结果.

N°3 包含了半群理论的某些基本结果的很简短的摘要——定理 3.2 是由 Phillips-Miyadera-Feller 所补充的 Hille-Iosida 定理. 对于证明, 可回到 Hille-Phillips 的书, Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., 1957. 3.4 包含"经典"意义下的 Cauchy 问题. 对于不同的表述(在向量广义函数的框架中)可回到 J. L. Lions, Equations différentielles Opérationnelles, Springer, Collection Jaune, t. 111, 1961.

N°4 的不等式是由于 Hardy-Littlewood-Polya 经典的 "Inequalities"书的第 IX 章中的不等式(9.9.8).

N°5 给出作者在 Théorème de trace et d'interpolation, J. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, 13(1959) p. 389～403 中的一个定理. 我们已稍许修改了此文所给的证明, 为了避免利用向量值的广义函数, 而只在此 Cauchy 问题的框架中表述问题.

N°6 给出对 $\alpha=0$ 属于 E. Gagliardo, Rend. Sem. Mat. Padova, 27 (1957), p. 284～305 的一个结果.

N°8 的证明是稍许简洁的, 对于细节, 可以参见 J. L. Lions, Théorèmes de Trace et d'interpolation, (IV) 将在 Math. Annalen 上发表.

N°9 的结果是属于 Slobodetsky, Doklady Akad. Nauk, t. 123 (1958), p. 616～619.

N°10 简要地给出迹空间的插值性质, 它允许容易地证明空间 $W^{s,p}(R^n)$的局部特性, $s$ 非整数(参见系 10.1)——这在 N°11 是有用的.

# 第 4 章

# 变分边值问题

## 1. 双线性泛函及无界算子

**1.1** 设 $V$ 及 $H$ 是两个 Hilbert 空间，$V\subset H$，由 $V$ 到 $H$ 中的嵌入是连续的.

记号将如下：对 $u, v\in V$（相应地，$f, g\in H$），$((u, v))$（相应地 $(f, g)$）表示 $u$ 及 $v$（相应地 $f$ 及 $g$）在 $V$（相应地 $H$）中的数量积. 置

$$\|u\|=((u, u))^{\frac{1}{2}}, \quad |f|=(f, f)^{\frac{1}{2}}.$$

设 $V$ 在 $H$ 中稠密.

**例 1.1** $V=H^1(\Omega)\,(=W^{1,2}(\Omega)$；第一章 N°2)；

$$H=L^2(\Omega);$$

$$((u, v))=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,dx+\int_\Omega u\bar{v}dx,$$

$$(f, g)=\int_\Omega f\bar{g}dx.$$

证明 $V$ 在 $H$ 中稠密.

**例 1.2** $V=H_0^1(\Omega)\,(=W_0^{1,2}(\Omega)$；第一章 N°4)，

$H=L^2(\Omega)$.

**例 1.3** $V=H^m(\Omega)\,(=W^{m,2}(\Omega))$，$m>1$，

$H=L^2(\Omega)$.

**1.2** 其次，给出一泛函

$$u, v\to a(u, v) \tag{1.1}$$

在 $V\times V$ 上为**双线性连续的**. 因此, $a(u, v)$ 线性依赖于 $u$, 反线性依赖于 $v(a(u, \lambda v)=\bar{\lambda}a(u, v))$, 且

$$|a(u, v)|\leqslant c\|u\|\|v\|, \quad u, \quad v\in V. \tag{1.2}$$

**例 1.4** 设 $a_{jk}$ 是一族 $\in L^{\infty}(\Omega)$ 的函数, $j=\{j_1, \cdots, j_n\}$, $k=\{k_1, \cdots, k_n\}$, $|j|, |k|\leqslant m$, 且(在例 1.3 的框架中)

$$a(u, v)=\sum_{|j|, |k|\leqslant m}\int_{\Omega}a_{jk}(x)\,D^{j}u\overline{D^{k}v}dx, \tag{1.3}$$
$$u, \ v\in V=H^{m}(\Omega).$$

证明(1.2).

**1.3** 由给定的 $V$, $H$ 及 $a(u, v)$ 开始, 能在 $H$ 中定义一无界算子 $A$.

**定义 1.1** 用 $D(A)$ 表示 $u\in V$ 使反线性泛函

$$v\to a(u, v) \tag{1.4}$$

对由 $H$ 所诱导的拓扑在 $V$ 上连续的 $u$ 所形成的空间.

**注意** $0\in D(A)$, 且 $D(A)$ 未必能化为 $\{0\}$!

若 $u\in D(A)$, 因为 $V$ 在 $H$ 中稠密, 泛函(1.4)由连续性能被延拓为在 $H$ 上连续的反线性泛函——且由于 $H$ 是一 Hilbert 空间, 因此可见:

$$\begin{cases}\text{对 } u\in D(A), \text{存在唯一的 } Au\in H \text{ 使} \\ a(u, v)=(Au, v) \text{对一切 } v\in V \text{ 成立.}\end{cases} \tag{1.5}$$

**练习** 验证由 $D(A)\to H$ 的映射 $u\to Au$ 是线性的.

**定义 1.2** 用 $A$ 表示由(1.5)所定义的、定义域为 $D(A)$ 的算子.

算子 $A$ 由三重结构 $\{V, H, a(u, v)\}$ 所定义.

**例 1.5** $V=H^1(R^n)$, $H=L^2(R^n)$,

$$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{R^n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\ dx+\int_{R^n}u\bar{v}\,dx.$$

验证

$$u\in D(A)\Leftrightarrow\begin{cases}u\in H^1(R^n),\\ -\Delta u+u\in L^2(R^n)\end{cases}\qquad \Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

**练习** 利用 Fourier 变换证明

(1.6) $$u\in D(A)\Leftrightarrow u\in H^2(R^n).$$

**例 1.6** $V=H_0^1(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$,

$$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\ dx+\int_{\Omega}u\bar{v}\,dx.$$

现在来证明

(1.7) $$u\in D(A)\Leftrightarrow\begin{cases}u\in H_0^1(\Omega),\\ -\Delta u+u\in L^2(\Omega).\end{cases}$$

首先注意到,若 $v=\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$,于是

(1.8) $$a(u,\ \varphi)=\langle-\Delta u+u,\ \bar{\varphi}\rangle$$

(在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 与 $\mathscr{D}(\Omega)$ 间的对偶).

所假设的是 $v\to a(u,\ v)$ 对 $L^2(\Omega)$ 的拓扑在 $H_0^1(\Omega)$ 上是连续的;因为 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密,说 $\varphi\to a(u,\ \varphi)$ 对 $L^2(\Omega)$ 的拓扑在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上连续是一样的,而这根据 (1.8) 等价于 $-\Delta u+u\in L^2(\Omega)$,由此得到(1.7).

**注意** 与(1.6) ($\Omega=R^n$ 的情况)相比较,可以问是否

$$u\in D(A)\Rightarrow u\in H^2(\Omega).$$

若(且仅若)$\Omega$ 有一足够正规的边界,这是正确的,我们将重新回到这一点.

**例 1.7** $V=H^1(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$,

$$a(u, v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}dx+\int_{\Omega}u\bar{v}\,dx.$$

我们来证明

$$(1.9)\quad u\in D(A)\Leftrightarrow\begin{cases}u\in H^1(\Omega),\ \Delta u\in L^2(\Omega),\\ -\int_{\Omega}\Delta u\cdot\bar{v}\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,dx\end{cases}$$

对一切 $v\in H^1(\Omega)$ 成立.

事实上，仍有(1.8)，致使特别地 $\varphi\to a(u, \varphi)$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上对 $L^2(\Omega)$ 的拓扑是连续的，有

$$-\Delta u+u\in L^2(\Omega),\ \text{因此}\ \Delta u\in L^2(\Omega).$$

此外，$a(u, v)=(Au, v)$ 给出

$$a(u, v)=(-\Delta u+u, v),$$

由此得到

$$(1.10)\qquad(-\Delta u, v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,dx;\ v\in H^1(\Omega).$$

反之，若 $u\in H^1(\Omega)$，$\Delta u\in L^2(\Omega)$ 且满足(1.10)式，于是 $a(u, v)=(-\Delta u+u, v)$，因此 $u\in D(A)$，由此得到(1.9).

让我们(暂时)形式上地说明关系式(1.9). 按照 Green 公式，有

$$(1.11)\quad(-\Delta u, v)=-\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}d\sigma+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,dx,$$

于此 $\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial n}=\text{外法向导数},\\ \Gamma=\Omega\ \text{的边界},\ d\sigma=\Gamma\ \text{的面积元素}.\end{cases}$

于是比较(1.10)及(1.11)，由此"导得"

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}v\,d\sigma=0\quad\text{对一切}\ v\in H^1(\Omega)\ \text{成立},$$

即(第三章)

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\cdot\psi d\sigma=0 \text{ 对一切 } \psi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)=W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma)\text{ 成立,}$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上成立.} \tag{1.12}$$

因此问题:“$Au=f,\ u\in D(A)$”是 Neumann 问题. 让我们强调一下,解释(1.12)是形式上的,(1.11)的分部积分未被证明; 况且若 $\Omega$ 是一个任意开集, $\frac{\partial}{\partial n}$ 没有任何意义! 能够期望——且我们将采取的——唯一的选择是在 $\Omega$ 的边界是足够正规的补充假设下证明(1.12)式.

## 2. 同构定理

**2.1** 我们来证明

**定理 2.1** 设存在 $\alpha>0$ 使

$$|a(v,\ v)|\geqslant\alpha\|v\|^2 \text{ 对一切 } v\in V \text{ 成立.} \tag{2.1}$$

那末,对在 $H$ 中任意的 $f$, 存在唯一的 $u\in D(A)$ 满足

$$Au=f. \tag{2.2}$$

**证** 1) 设 $u\in D(A)$ 是(2.2)的解, 那末对任意 $v\in V$ 有

$$(Au,\ v)=(f,\ v).$$

而根据(1.5),由此得到

$$a(u,\ v)=(f,\ v),\quad v\in V. \tag{2.3}$$

反之, 若 $u\in V$ 满足(2.3), 于是 $v\to a(u,\ v)\ (=(f,\ v))$ 在 $V$ 上对由 $H$ 所诱导的拓扑是连续的, 因此(按照 N°1 的定义),

$$a(u,\ v)=(Au,\ v)=(f,\ v),$$

且因为 $V$ 在 $H$ 中稠密,这导致(2.2).

因此，这就等价于在 $V$ 中找寻 $u$ 使满足(2.3)式.

2) 因为 $v \to a(u, v)$ 在 $V$ 上连续，能写出

(2.4) $$a(u, v) = ((\mathscr{A}u, v)), \quad v \in V$$

证明 $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V; V)$，且给定 $a(u, v)$ 等价于给定 $\mathscr{A}$.

于是(2.3)等价于

(2.3′) $$((\mathscr{A}u, v)) = (f, v).$$

但因为 $v \to (f, v)$ 在 $H$ 上(因而在 $V$ 上!)连续，

(2.5) $$(f, v) = ((Gf, v)), \quad Gf \in V.$$

这定义了 $G \in \mathscr{L}(H; V)$

**结论** (2.3)等价于

(2.3″) $$\mathscr{A}u = Gf.$$

3) 于是定理将从我们要来验证的下述性质得到:

(2.6) $\mathscr{A}$ 是由 $V$ 到其自身的一个同构.

为此，表示(2.1)为

$$\alpha \|v\|^2 \leqslant |a(v, v)| = |((\mathscr{A}v, v))| \leqslant \|\mathscr{A}v\| \|v\|,$$

因此

(2.7) $$\|\mathscr{A}v\| \geqslant \alpha \|v\|.$$

结果:

(2.8) $\begin{cases} V \text{ 通过 } \mathscr{A} \text{ 作用后的象 } \mathscr{A}V \text{ 在 } V \text{ 中是闭的,} \\ \mathscr{A} \text{ 是一对一的.} \end{cases}$

因此，若能证明 $\mathscr{A}v$ 在 $V$ 中稠密，就得到结果(2.6)；因此设 $v_0 \in V$ 使 $((\mathscr{A}u, v_0)) = 0$ 对一切 $u \in V$ 成立，于是特别有 $((\mathscr{A}v_0, v_0)) = 0$, 因此(因为 $|((\mathscr{A}v_0, v_0))| \geqslant \alpha \|v_0\|^2$), $v_0 = 0$——由此得到结果.

**注 2.1** 问题的解由

(2.9) $$u = \mathscr{A}^{-1}Gf$$

给出.

**注 2.2** 共轭泛函.

以一般的方式,置

(2.10) $a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$ 对 $u, v \in V$ 成立.

这样在 $V \times V$ 上定义了一个连续的双线性泛函,称为 $a(u, v)$ 的共轭.

设 $A^*$ 是由三重结构 $\{V, H, a^*(u, v)\}$ 所定义的算子.

因为 $|a^*(v, v)| = |a(v, v)|$, 有

(2.11) 在定理 2.1 的假设下,存在唯一的 $u \in D(A^*)$ 满足

$$A^* u = f.$$

**注 2.3** 在假设(2.1)成立的条件下:

$D(A)$ 在 $H$ 中稠密 且 $A$ 是闭的(自然地对 $A^*$ 有同样的结论).

事实上,设 $f \in H$ 使

$$(u, f) = 0 \text{ 对一切 } u \in D(A) \text{ 成立.}$$

在 $D(A^*)$ 中存在(唯一的)$u_0$ 使

$$f = A^* u_0.$$

于是

(2.12) $(u, f) = (u, A^* u_0) = \overline{(A^* u_0, u)} = \overline{a^*(u_0, u)}$

$$= a(u, u_0) = (Au, u_0) = 0;$$

因为 $A$ 映射 $D(A)$ 到 $H$ 上(定理 2.1),结果就得到

$(g, u_0) = 0$ 对一切 $g \in H$ 成立,因此 $u_0 = 0$.

因此 $D(A)$ 在 $H$ 中是稠密的.

现证明 $A$ 是闭的. 设 $u_n \in D(A)$,而 $u_n \to u$ 在 $H$ 中成立, $Au_n = f_n \to f$ 在 $H$ 中成立. 于是 $u_n = \mathscr{A}^{-1} G f_n \to \mathscr{A}^{-1} G f$ 在 $V$ 中成立,且因为必须 $\mathscr{A} u = Gf$, 可见 $u \in D(A)$ 且 $f = Au$.

**结果** 若装备 $D(A)$ 以模

$$(|u|^2 + |Au|^2)^{\frac{1}{2}},$$

它是一个 Hilbert 空间，且 $A$ 是由 $D(A)$ 到 $H$ 上一个同构.

**注 2.4** 从(2.6)得到(总是伴随着(2.1))，若 $v \to L(v)$ 是 $V$ 上的一个连续的反线性泛函，存在唯一的 $u \in V$ 满足

(2.13) $\qquad a(u, v) = L(v)$ 对一切 $v \in V$ 成立.

## 2.2 现证明

**定理 2.2** 用三重结构 $\{V, H, a^*(u, v)\}$ 定义的算子 $A^*$ 是 $A$ 的共轭.

**证** 设 $A_1$ 是 $A$ 的共轭. 要证明 $A_1 = A^*$ (即 $D(A_1) = D(A^*)$，且 $A_1 u = A^* u$ 对 $u \in D(A^*)$ 成立). 设 $v \in D(A_1)$. 于是泛函 $u \to (Au, v)$ 在 $D(A)$ 上对 $H$ 的拓扑是连续的，且 $(Au, v) = (u, A_1 v)$. 但设 $v_0 \in D(A^*)$ 是 $A^* v_0 = A_1 v$ 的(唯一)解. 于是 $(u, A_1 v) = (u, A^* v_0) = (Au, v_0)$ (参见(2.12))，由此得到 $(Au, v - v_0) = 0$ 对一切 $u \in D(A)$ 成立. 由此 $v = v_0$，因此 $v \in D(A^*)$ 且 $A_1 v = A^* v$. 因为 $D(A^*) \subset D(A_1)$ 是明显的，就得到定理.

**结果** 若 $a(u, v) = a^*(u, v)$ (伴随着(2.1))，算子 $A$ 是自共轭的.

# 3. 例 (I)

## 3.1 例 1.6 的情况. 有

$$a(v, v) = \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2,$$

因此(2.1)成立(而 $a = 1$). 因此:

$$(3.1) \begin{cases} \text{对在 } L^2(\Omega) \text{ 中给定的 } f, \text{ 存在唯一的 } u \in H_0^1(\Omega) \\ \text{使 } -\Delta u + u = f. \end{cases}$$

若 $\Omega$ 的边界 $\Gamma$ 是正规的(参见第三章)，$u \in H_0^1(\Omega)$ 等价于

$$u \in H^1(\Omega) \text{ 且 } \gamma_0 u = 0 \quad (\gamma_0 u = u|_\Gamma).$$

因此:

$$(3.2)\begin{cases} \text{对在 } L^2(\Omega) \text{ 中给定的 } f, \text{存在唯一的} u \in H^1(\Omega) \text{ 使} \\ -\Delta u + u = f, \\ u|_\Gamma = 0 (\Gamma \text{ 足够正规}), \end{cases}$$

这是 Dirichlet 问题.

对

(3.3) $L(v) = \langle f, \bar{v} \rangle$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ $\quad (= (H_0^1(\Omega))')$

利用注 2.4, 于是能在(3.1)(或(3.2))中用"$f \in H^{-1}(\Omega)$"代替"$f \in L^2(\Omega)$".

**注 3.1** "通常"的 Dirichet 问题是关联于 $-\Delta$, 而不是关联于 $-\Delta+1$;

这儿我们如何来解决这个问题呢? 设维数 $n \geq 3$. 用 $D^{1,2}(\Omega)$(参见第二章)表示 $\mathscr{D}(\Omega)$用(前-Hilbert 空间)模

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| D_i \varphi \|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

的完备化.

于是(第二章)

(3.4) $$D^{1,2}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

若取

$$\begin{cases} V = D^{1,2}(\Omega), \\ a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (D_i u)(D_i \bar{v}) dx, \end{cases}$$

于是对于在 $V$ 上连续的 $v \to L(v)$, 存在唯一的 $u \in V$ 满足

(3.5) $$a(u, v) = L(v).$$

验证(作为练习,参见第一章)$L(v)$能被表为

$$(3.6)\qquad \begin{cases} L(v)=\langle f_0,\ \bar{v}\rangle+\sum\limits_{i=1}^{n}\left\langle f_i,\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\right\rangle, \\ f_0\in L^{q'}(\Omega)\quad \left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1\right), f_i\in L^2(\Omega). \end{cases}$$

因此：对 $f\in(D^{1,2}(\Omega))'$ 给定，即

$$(3.7)\qquad f=f_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i},\ f_0\in L^{q'}(\Omega),\ f_i\in L^2(\Omega),$$

存在唯一的 $u\in D^{1,2}(\Omega)$ 使

$$a(u,\ v)=\langle f,\ \bar{v}\rangle \text{ 对一切 } v\in D^{1,2}(\Omega) \text{ 成立},$$

即

$$(3.8)\qquad -\Delta u=f.$$

**注意** 在此情况起着 $H$ 的作用的空间是 $L^q(\Omega)$，它不是 Hilbert 空间.

## 3.2 例 1.7 的情况.

这儿仍有 $$a(v,\ v)=\|v\|^2,$$

致使

$$(3.9)\qquad \begin{cases} \text{对在 } L^2(\Omega) \text{ 中给定的 } f,\ \text{存在一个且仅仅一个 } u \text{ 使} \\ u\in H^1(\Omega),\ \text{且 } \Delta u\in L^2(\Omega) \text{ 而} \\ -(\Delta u,\ v)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i},\ \dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right) \text{对一切 } v\in H^1(\Omega) \text{成立}, \\ \text{且 } -\Delta u+u=f. \end{cases}$$

形式地(参见例 1.7)，

$$(3.10)\qquad \begin{cases} -\Delta u+u=f, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上}, \end{cases}$$

这是 Neumann 问题

**注 3.2** 让我们应用注 2.4. 设 $\Omega$ 是一个很正规的有界开

集(参见第二章). 已知(第三章 N°11) $v \to \gamma_0 v$ 是由 $H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma)$ 的一个线性连续(且在上)的映照. 于是设 $g_0$ 在 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))'$ 中给定, 仍设 $f$ 在 $L^2(\Omega)$ 中给定, 于是

$$L(V) = \int_{\Omega} f\bar{v}\,dx + \langle g_0, \overline{\gamma_0 v}\rangle, \tag{3.11}$$

(于此尖括号表示在 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 及 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中的数量积.)定义一个在 $H^1(\Omega)$ 上的反线性连续泛函, 因此, 存在唯一的 $u \in H^1(\Omega)$ 满足

(3.12) $a(u, v) = L(v)$ 对一切 $v \in V = H^1(\Omega)$ 成立.

它给出(形式地):

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g_0. \end{cases} \tag{3.13}$$

这仍是一个 Neumann 问题, 带着非齐次的边界条件(相应于 $g_0 = 0$ 的情况称为"齐次"的). 问题 (3.13) 落在非齐次椭圆边值问题的族中.

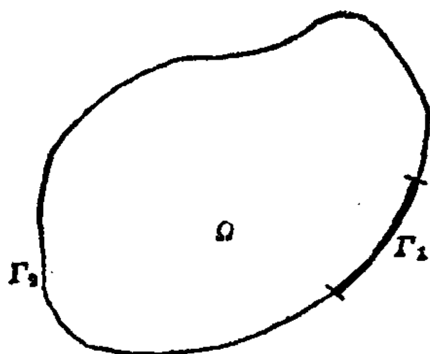
**练习**

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \\ \gamma_0 u = \varphi_0, \end{cases}$$

$\varphi_0$ 在 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中给定.

[引入 $w \in H^1(\Omega)$ 而 $\gamma_0 w = \varphi_0$, 再引入 $u - w$, 就回到情况 3.1].

**练习** $\Omega$ 是有足够正规的边界的区域, 且 $\Gamma_1$ 是 $\Gamma$ 的一部分(具有正测度), 取




$$V=\{u \mid u\in H^1(\Omega),\ \gamma_0 u=0 \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 上}\}.$$

验证使 $a(u, v)=\int_\Omega f\bar{v}dx$ 对一切 $v\in V$ 成立的解满足

$$\begin{cases} -\Delta u+u=f, \\ u=0 \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 上}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ 在 } \Gamma_2 \text{ 上}. \end{cases}$$

这是一个混杂问题.

## 4. 例 (II)

**4.1** 设 $a_{ij}$ 是函数 $\in L^\infty(\Omega)$, 满足

$$\text{(4.1)} \qquad \operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_j\bar{\xi}_i \geqslant \alpha(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2),$$

$\xi_i\in C$, $\alpha>0$, 几乎处处在 $\Omega$ 中成立.

设 $V=H^1(\Omega)$ 的闭向量子空间, 且

$$\text{(4.2)} \qquad H_0^1(\Omega)\subset V\subset H^1(\Omega) \quad (\text{等号是可能的}).$$

对 $u, v\in H^1(\Omega)$, 置

$$\text{(4.3)} \quad a(u, v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}dx+\int_\Omega a_0 u\bar{v}\,dx,$$

而 $a_0$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中给定.

验证

(4.4) $\operatorname{Re} a(v, v) \geqslant \inf(\alpha, \alpha_0) \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, v \in H^1(\Omega)$,

若(除(4.1)外)

(4.5) $\operatorname{Re} a_0(x) \geqslant \alpha_0 > 0$ 几乎处处在 $\Omega$ 中成立.

**结果** 对在 $L^2(\Omega)$ 中给定的 $f$，在 $V$ 中存在唯一的 $u$ 满足

(4.6) $a(u, v) = \int_\Omega f\bar{v}\,dx$ 对一切 $v \in V$ 成立.

## 4.2 例 4.1 $V = H^1(\Omega)$.

证明(4.6)的解 $u$ 满足

1°)

(4.7) $$Au = f,$$

于此

(4.8) $$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u.$$

2°)

(4.9) $$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上},$$

于此

(4.10) $$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i),$$

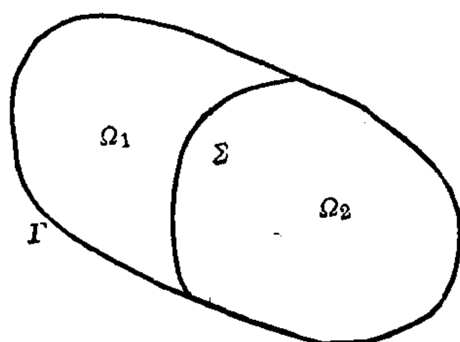
而 $\cos(n, x_i)$ 表示 $\Gamma$ 的外法线 $n$ 的第 $i$ 个方向余弦.

**练习** 当 $V$ 是如同点 3.3 的第 2 个练习中那样被定义时，表述边界条件.

**练习** 对 $a_{ij}$ 取下式定义的函数：

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{(1)} & \text{在 } \Omega_1 \text{ 中}, \\ a_{ij}^{(2)} & \text{在 } \Omega_2 \text{ 中}, \end{cases}$$

$$\Omega=\Omega_1\cup\Sigma\cup\Omega_2$$ (参见图)




而 $a_{ij}^k\in L^\infty(\Omega_k)$, $k=1, 2$ 且

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x)\xi_j\bar{\xi}_i\geqslant\alpha(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2),\quad \alpha>0,$$

几乎处处在 $\Omega_k$ 中成立.

设 $u_k=u$ 在 $\Omega_k$ 上的限制.

**写出由 $u_1$, $u_2$ 所满足的系统,连同在 $\Sigma$ 上的交界面条件.**

## 5. 例 (III)

取

(5.1) $$V=\{u|u,\ \Delta u\in L^2(\Omega)\}$$

为 Hilbert 空间,其模为

$$\|u\|=\left(\int_\Omega(|u|^2+|\Delta u|^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(参见第二章).

于是,若 $H=L^2(\Omega)$,且

(5.2) $$a(u,\ v)=\int_\Omega u\bar{v}dx+\int_\Omega(\Delta u)(\Delta\bar{v})dx,$$

此理论可应用.

**因此,对在 $L^2(\Omega)$ 中给定的 $f$, 存在唯一的 $u\in V$ 使成立**

$$(5.3)\qquad a(u, v)=\int_{\Omega} f\bar{v}\,dx, \quad v\in V.$$

**练习** 验证

$$\begin{cases} \Delta^2 u+u=f, \\ \Delta u|_{\Gamma}=0 \qquad \dfrac{\partial}{\partial n}\Delta u|_{\Gamma}=0. \end{cases}$$

**练习** 证明 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $V$ 中的完备化是 $H_0^2(\Omega)$.

**练习** 证明 $u\in V$ 一般说不导至 $u\in H^1(\Omega)$.

# 6. Riez-Fredholm 的两择性

## 6.1 证明

**定理 6.1** 如同 N°1 那样给出 $V$, $H$, 并给出在 $V\times V$ 上的连续双线性泛函 $a(u, v)$, 使得存在 $\lambda_0$, 成立

$$(6.1)\qquad \operatorname{Re} a(v, v)+\lambda_0|v|^2\geqslant\alpha\|v\|^2, \ \alpha>0, \ v\in V.$$

此外假设

(6.2) $V$ 在 $H$ 中的嵌入是紧致的(全连续).

那末, Riez-Fredholm 的二择性对方程

$$(6.3)\qquad \begin{cases} Au+\lambda u=f, \ f \text{ 在 } H \text{ 中给定}, \\ u\in D(A) \end{cases}$$

是有效的.

**证** 1) 若 $A$ 是由三重结构 $\{V, H, a(u, v)\}$ 所定义的算子, 首先验证由三重结构 $\{V, H, a(u, v)+\lambda(u, v)\}$ 所定义的算子是 $A+\lambda$, 而 $D(A+\lambda)=D(A)$.

2) 从 (6.1) 及定理 2.1 于是得到方程

$$(6.4)\qquad \begin{cases} (A+\lambda_0)u=f, \\ u\in D(A), \end{cases}$$

允许一个唯一的解

$$u=G(\lambda_0)f, \quad G(\lambda_0)\in\mathscr{L}(H;D(A)). \tag{6.5}$$

因为从 $V$ 到 $H$ 中的嵌入——因而从 $D(A)$ 到 $H$ 中的嵌入——是紧致的，在 $\mathscr{L}(H;H)$ 中所考虑的算子 $G(\lambda_0)$ 是紧致的.

但是(6.3)等价于

$$(A+\lambda_0)u+(\lambda-\lambda_0)u=f,$$

即

$$u+(\lambda-\lambda_0)G(\lambda_0)u=G(\lambda_0)f. \tag{6.6}$$

只需在 $H$ 中求解 $u$（由于 $u=G(\lambda_0)f-(\lambda-\lambda_0)G(\lambda_0)u$，于是 $u$ 必然在 $D(A)$ 中）且因为 $G(\lambda_0)$ 在 $H$ 中是紧致的，就得到定理.

## 6.2 例 6.1

取 $V=H^1(\Omega)$，$H=L^2(\Omega)$，而 $\Omega$ 是具足够正规的边界的有界开集，于是(第二章)从 $H^1(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 中的嵌入是紧致的.

这允许对，例如说，

$$a(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}dx \tag{6.7}$$

应用定理 6.1.

由此导得(见例 1.7 及 N°3.2)满足

$$\begin{cases} -\Delta w_j=\lambda_j w_j,\ \lambda_j\geqslant 0, \\ \left.\dfrac{\partial w_j}{\partial n}\right|_\Gamma=0 \end{cases} \tag{6.8}$$

的特征函数 $w_j$ 的在 $L^2(\Omega)$ 中的一个正交完全系的存在性.

$w_j$ 的系统在 $H^1(\Omega)$ 中同样是正交的和完全的.

## 6.3 例 6.2

取 $V=H_0^1(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$, $\Omega$ 是任意的有界开集.

由 $H_0^1(\Omega)\xrightarrow{i}L^2(\Omega)$ 的嵌入是紧致的. [事实上, 考虑一个球 $Q$ 使 $\overline{\Omega}\subset Q$; 嵌入 $i$ 由下述所组成:

1°) 从 $H_0^1(\Omega)\to H_0^1(Q)$ 的等距映射, 在 $\Omega$ 之外用 0 来延拓(见命题 4.1);

2°) 从 $H_0^1(Q)\to L^2(Q)$ 的嵌入;

3°) 从 $L^2(Q)\to L^2(\Omega)$ 的限制;

1°)及 3°)是连续的, 而 2°)是紧致的, 由此得到结论.]

仍应用定理 6.1 于此情况, 而 $a(u, v)$ 由(6.7)给出. 由此导得满足

$$
\begin{aligned}
&-\Delta w_j=\lambda_j w_j, \quad \lambda_j>0,\\
&w_j|_\Gamma=0
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

的特征函数 $w_j$(自然地它和在(6.8)中的不一样!!)的在 $L^2(\Omega)$ 中的一个正交完全系的存在性.

$w_j$ 的系统在 $H_0^1(\Omega)$ 中同样是正交的和完全的.

**注意** 在(6.9)中 $w_j|_\Gamma=0$ 简单地意味着

$$w_j\in H_0^1(\Omega).$$

# 7. 正规性的一个(很简单的)结果

## 7.1 考虑开集 $\Omega=\{x|x_n>0\}$.

对 $u, v\in H^1(\Omega)$, 设

$$a(u, v)=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}dx, \tag{7.1}$$

于此

(7.2)　$a_{ij}\in B^1(\overline{\Omega})=$ 在 $\overline{\Omega}$ 中一次连续可微，

本身连同其一阶导数为有界的函数空间.

假设

(7.3)　$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_j\bar{\xi}_i\geqslant\alpha(|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2),\ \alpha>0;$

已经看到在此条件下，在 $H^1(\Omega)$ 中存在唯一的 $u$ 满足

(7.4) $a(u,\ v)+\lambda(u,\ v)=(f,\ v)$ 对一切 $v\in H^1(\Omega)$ 成立

$(\lambda>0$ 固定)，而 $f$ 在 $L^2(\Omega)$ 中给定.

现证明这导至: $u\in H^2(\Omega)$.

**7.2**　第一步证明当指标 $i,\ j$ 中至少有一个 $\neq n$ 时，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\in L^2(\Omega). \tag{7.5}$$

记号: $\varphi$ 是一个在 $\Omega$ 中的函数，$\tau_h\varphi$ 由

$$\tau_h\varphi=\varphi(x_1+h,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

所定义，注意到 $(\tau_h\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ \tau_{-h}\psi)$；置

$$a_h(u,\ v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\tau_h a_{ij}-a_{ij}}{h}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,dx. \tag{7.6}$$

由于(7.2)，

$$\begin{cases}|a_h(u,\ v)|\leqslant c_1\|u\|\|v\|,\\ c_1=\text{常数},\ \|\ \ \|=H^1(\Omega)\text{的模}.\end{cases} \tag{7.7}$$

用 $\tau_{-h}v$ 代替 $v$ 来利用(7.4)式(这是可以允许的)；通过一个方便的计算，可导得

$$a(\tau_h u,\ v)+\lambda(\tau_h u,\ v)+ha_h(\tau_h u,\ v)=(f,\ \tau_{-h}v),$$

由此，减去(7.4)式并除以 $h$，得到

(7.8) $$a\left(\frac{\tau_h u-u}{h}, v\right)+\lambda\left(\frac{\tau_h u-u}{h}, v\right) = \left(f, \frac{\tau_{-h}v-v}{h}\right)-a_h(\tau_h u, v).$$

第二项按模由 $c_2\|v\|$ 所高估(参见 7.7). 于是若在(7.8)中取 $v=\frac{\tau_h u-u}{h}$, 就导得

$$\left\|\frac{\tau_h u-u}{h}\right\|^2 \leqslant c_3\left\|\frac{\tau_h u-u}{h}\right\|,$$

于是

(7.9) $$\left\|\frac{\tau_h u-u}{h}\right\|\leqslant c_3.$$

结果能抽出 $h_i\to 0$ 使 $\frac{\tau_{h_i}u-u}{h_i}\to w$ 在 $H^1(\Omega)$ 中弱收敛; 但在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的意义下

$$\frac{\tau_{h_i}u-u}{h_i}\to\frac{\partial u}{\partial x_1},$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=w\in H^1(\Omega).$$

同样的议论对关于 $x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的平移是有效的(但对 $x_n$ 的平移不行), 且于是给出(7.5).

**7.3** 剩下来只要证明 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\in L^2(\Omega)$.

但由(7.4), 可导得

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\lambda u=f.$$

由此

$$-a_{nn}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\text{属于 } L^2(\Omega) \text{ 的项的和(由于(7.5)式)}=f,$$

于是

$$a_{nn}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\in L^2(\Omega).$$

根据(7.3), $\operatorname{Re} a_{nn}(x)\geqslant\alpha>0$, 于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\in L^2(\Omega)$, 这就证明了断言.

**练习** 若 $\Omega$ 是一个具有正规边界的有界开集, 证明与前述类似的结果.

## 8. 问　　题

留下来要解决的问题是很多的, 这儿是其中某些问题的一个简短的分类.

### 8.1 强制性问题

若给出一由

$$a(u,\ v)=\sum_{|j|,\,|k|\leqslant m}\int_\Omega a_{jk}\,D^j u\,\overline{D^k v}\,dx \tag{8.1}$$

所给出的泛函, 其中 $a_{jk}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中被给定(偶而还带上附加的正规性的假设), 问何时有

$$|a(v,\ v)|\geqslant\alpha\|v\|^2_{H^m(\Omega)},\ \alpha>0$$

对一切 $v\in V$ 成立, 而 $V$ 是 $H^m(\Omega)$ 的子空间, 其中的 $u$ 使 $B_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u|_\Gamma=0$, 而 $B_j$ 是一族阶数 $\leqslant m-1$ 的算子, 其数目 $\leqslant m$.

### 8.2 正规性问题

问题主要在于将 N°7 的结果置于一个一般的框架之中,

使对于任意阶的算子带各种边界条件都有效.

我们将满足于对此主题陈述某些结果. 通过变换, 可导至在不同的空间中的边值问题的求解, 由此可化为非齐次问题.

**8.3** 在怎样的测度中 $L^2$ 的作用是本质的? 特别能否用 $L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$. $p\neq 2$ 来代替 $L^2(\Omega)$?

**8.4** 在 N°2 中所给出的同构的准则仅仅是使 $A$ 在 $H$ 上是 $D(A)$ 的一个同构的充分(和方便的)条件, 这个准则的条件绝不是必要的. 同样当 $A$ 是一个微分算子, 而其定义域由边界条件所确定时是如此. 参阅 S. Agmon, Remarks on self-adjoint and semi-bounded elliptic boundary value problems, Proc. Int. Symposium on Linear Spaces, The Hebrew Univ. Jerusalem, 1960, p. 1～13.

自然地, 如果相信前面所列举的已是详尽无遗, 那将是天真的.

能用由 Lipschitz 条件所定义的另外的空间来代替 $L^p(\Omega)$; 能力图拓广此理论到微分方程组去; 然后到非线性问题, 等等, 等等, 等等.

## 关于第四章的注记

本章能作为变分边值问题理论的引论. 我们的叙述根据 J.L.Lions 的论文: Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta Math., 94(1955), p. 13～153, Chapitre I.

为了补充注 3.1, 可查阅 J. Deny-J. L. Lions, Annales Inst. Fourier, 5(1955), p. 305～370.

将能用如下的论文来补足本章的讲义:

E. Magenes-G. Stampacchia, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, t. 12(1958), p. 247～358;

J. L. Lions, Cours du Tata Institude, Bombay, 1957.

建议思考在教材中所提出的许多习题.

对于 Riesz-Fredholm 的经典二择性 (N°6), 可从例如说: Riesz-Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionnelle 或 Dunford-Schwartz, Linear Operators, Part I 中查阅.

N°7 给出一个正规性的很简单的结果, 方法(L. Nirenberg) 比结果是更重要的[补充: 对 N°7 的方法及 Aronszajn-Smith 的"补偿法", 参见 Lions, Cours du Tata Institute, 上面所列的文章; 另外的方法: Agmon-Douglis-Nirenberg Browder, Peetre, Schechter 的工作].

在 N°8 中我们简要地列出了一些问题, 以后我们将以较为深入的方式重新回到这些问题上来. 对于非线性问题, 我们特别回转到 C. Morrey Jr. 的一本书, 将由 Springer 出版(黄皮书).

第 5 章

# 增殖算子和正规增殖算子

## 1. 双线性泛函和半群的无穷小生成元

采用第四章 N° 1 和 2 的框架，因此有 $V$, $H$, $a(u, v)$，且假设存在 $\lambda_0$ 使

(1.1) $\operatorname{Re} a(v, v)+\lambda_0|v|^2 \geqslant \alpha\|v\|^2, \ \alpha>0, \ v \in V.$

于是

**定理 1.1** 设 $A$ 是由三重结构 $\{V, H, a(u, v)\}$ 所定义的算子. 若(1.1)成立，那末 $-A$ 是在$H$中的一个半群 $G(t)$ 的无穷小生成元，而此半群满足

(1.2) $|G(t)| \leqslant \exp(\lambda_0 t).$

$(|G(t)|=\sup |G(t) f| /|f|, \ f \in H.)$

**证** 应用第三章的定理 3.2.

根据第四章注 2.3，可知 $D(A)$ 是稠密的且 $A$ 是闭的(应用附注到 $A+\lambda_0$ 上).

因此剩下来要观察对 $\xi>\lambda_0$, $A+p$ 在 $H$ 中是可逆的，且

(1.3) $$|(A+p)^{-1}| \leqslant \frac{1}{\xi-\lambda_0}, \ \xi>\lambda_0.$$

但方程 $\begin{cases}(A+p) u=f \\ u \in D(A)\end{cases}$ 等价于

(1.4) $a(u, v)+p(u, v)=(f, v)$

对一切 $v \in V$ 成立.

但由于(1.1),

(1.5) $\quad \mathrm{Re}[a(v, v)+p(v, v)]$

$$=\mathrm{Re}[a(v, v)+\lambda_0|v|^2+(\xi-\lambda_0)|v|^2]$$

$$\geqslant\alpha\|v\|^2+(\xi-\lambda_0)|v|^2.$$

由此可以应用第四章的定理2.1. 因此，一旦$\xi\geqslant\lambda_0$，方程(1.4)就允许唯一解. 另外，在(1.4)中取$v=u$，就导得

$$\alpha\|u\|^2+(\xi-\lambda_0)|u|^2\leqslant\mathrm{Re}(f, u)\leqslant|f||u|.$$

由此得到$|u|\leqslant\dfrac{1}{(\xi-\lambda_0)}|f|$，这证明了(1.3)，且完成了定理的证明.

## 2. 应　　用

**2.1** 由定理1.1及半群的理论(参见第三章的回顾)得到

**定理 2.1** 连同(1.1)给出三重结构$\{V, H, a(u, v)\}$. 假定给定$u_0$及$f$使

(2.1) $\qquad u_0\in D(A),$

(2.2) $\qquad t\to f(t)$

由$t\geqslant 0\to H$连续. 于是，存在一个函数且仅存在一个函数$t\to u(t)$使

(2.3) $\qquad u(t)\in D(A)\quad$ 对 $t\geqslant 0$,

(2.4) $\qquad \begin{cases} t\to u(t) & \text{由 } t\geqslant 0\to H \text{ 是一次连续可微,} \\ t\to u(t) & \text{由 } t\geqslant 0\to D(A) \text{ 是连续的.} \end{cases}$

(2.5) $\qquad \begin{cases} Au(t)+\dfrac{du(t)}{dt}=f(t) \\ u(0)=u_0. \end{cases}$

此解由下式给出:

(2.6) $\qquad u(t)=G(t)u_0+\int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma.$

**2.2** 例(I)(见第四章,N° 3, 3.1).

$$V=H_0^1(\Omega),\ H=L^2(\Omega),$$

$$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,dx.$$

于是(2.3)、(2.5)意味着:

$$\begin{cases} u(t)\in H_0^1(\Omega),\ \Delta u(t)\in L^2(\Omega), \\ -\Delta_x u(t)+\dfrac{\partial u(t)}{\partial t}=f(t), \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

**注意** $u(t)$是$t\to$"$x\to u(x,\ t)$"的函数,因此能写(2.7)为下述形式:

$$\begin{cases} -\Delta_x u(x,\ t)+\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ t)=f(x,\ t),\ x\in\Omega,\ t>0, \\ u(x,\ 0)=u_0(x), \\ u(x,\ t)=0 \quad 若\ x\in\Gamma,\ t>0. \end{cases} \tag{2.8}$$

这是热传导的经典问题.

**2.3** 例(II)(见第四章 N° 3, 3.2).

$$V=H^1(\Omega),\ H=L^2(\Omega),$$

$$a(u,\ v)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,dx.$$

**练习** 证明可得到类似于(2.8)的问题,而(2.8)的最后的条件被(形式地)代替为

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x,\ t)=0,\ x\in\Gamma,\ t>0$$

**2.4** 练习

应用定理 2.1 到第四章的所有的例子及练习上去.

# 3. 增殖算子及正规增殖算子

## 3.1 定义 3.1

$H$ 中的(无界)算子 $A$ 称为增殖的，若对于所有的 $u\in D(A)$，有

$$\text{Re}(Au, u)\geqslant 0. \tag{3.1}$$

现在让我们引入**正规增殖泛函**.

**定义 3.2** 考虑三重结构$\{V, H, a(u, v)\}$.

泛函 $a(u, v)$ 称为**正规增殖的**，若

(i) $\begin{cases}\text{对所有 } \varepsilon>0, \text{存在 } \alpha(\varepsilon)>0 \text{ 使}\\ \text{Re}\, a(v, v)+\varepsilon|v|^2\geqslant\alpha(\varepsilon)\|v\|^2, \quad v\in V,\end{cases}$

(ii) $|\text{Im}\, a(v, v)|\leqslant\beta\, \text{Re}\, a(v, v), \quad v\in V.$

自然地，由$\{V, H, a(u, v)|$所定义的算子 $A$ 于是是增殖的.

**注 3.1** 定义 3.2 经常以不同的方式出现. 给出 $V$, $H$, $V\subset H$, $V$ **没有拓扑**，而 $a(u, v)$ 是 $V\times V$ 上的双线性泛函，使得

(j) $\text{Re}\, a(v, v)\geqslant 0$; $\text{Re}\, a(v, v)=0\Rightarrow v=0$;

(jj) 若 $V_n\to V$ 在 $H$ 中成立，$V_n\in V$，且若 $\text{Re}\, a(V_n-V_m, V_n-V_m)\to 0$，于是 $v\in V$ 且 $\text{Re}\, a(v_n-v, v_n-v)\to 0$;

(jjj) $\equiv$ (ii).

根据(jj)，$V$ 装备以模

$$(|v|^2+\text{Re}\, a(v, v))^{\frac{1}{2}}=\|V\|$$

是完备的——因此是 Hilbert 空间——且模

$$(\varepsilon|V|^2+\text{Re}\, a(V, V))^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon>0 \text{ 任意},$$

等价于$\|V\|$,因此,(i)及(ii)成立.

反之,若(i),(ii)成立,于是(j),(jj),(jjj)成立,这两个表示是等价的.

**定义 3.3** 由三重结构$\{V, H, a(u, v)\}$所定义的算子$A$,其中泛函$a(u, v)$是正规增殖的,被称为**正规增殖的.**

**3.2** **定理 3.1** 若$A$是正规增殖的,则$-A$是在$H$中一收缩半群的无穷小生成元.[半群$G(t)$称为收缩的,若

$$|G(t)|\leqslant 1,\ t\geqslant 0. \tag{3.2}$$
]

**证** 根据定理1.1,$-A$是半群$G(t)$的无穷小生成元,现在能在(1.1)中取$\lambda_0>0$任意,因此根据(1.2),$|G(t)|\leqslant \exp(\lambda_0, t)$,$\lambda_0>0$任意——由此得到(3.2).

于是能提出逆问题,首先有

**定理 3.2** 设$G(t)$是Hilbert空间$H$中的一个收缩半群,于是若$A$是$G(t)$的无穷小生成元,则算子$-A$是增殖的.

**证** 设$u\in D(A)$;于是函数$t\to G(t)u$是由$t\geqslant 0\to H$的一次连续可微函数,因此$t\to\varphi(t)=(G(t)u, G(t)u)$当$t\geqslant 0$时是可微的,且因为$|G(t)u|\leqslant|u|$,有$\varphi(t)\leqslant\varphi(0)$,因此,$\frac{d}{dt}\varphi(t)\big|_{t=0}\leqslant 0$,但$\frac{d}{dt}\varphi(t)\big|_{t=0}=2\mathrm{Re}(Au, u)$,由此得到$\mathrm{Re}(-Au, u)\geqslant 0$.证毕.

**问题** 现在来提出下面的问题:

1) 若$A$是一收缩半群的无穷小生成元,$-A$是增殖的且有补充的性质:例如,其定义域是稠密的,它是闭的等等,能不能在增殖算子类中刻划出那些是收缩半群的无穷小生成元的增殖算子的特征?

2）是否存在非正规增殖的增殖算子，参见后面的练习，且是否能刻划其无穷小生成元是正规增殖的那些收缩半群的特征？

**练习** 设 $A$ 在 $L^2(R)$ 中由下式定义：

$$D(A)=H^1(R)=\{u|u,\ \frac{du}{dx}\in L^2(R)\},$$

$$Au=du/dx.$$

证明 $A$ 是增殖的（且同样是**守恒**的，即 $\mathrm{Re}(Au, u)=0$）。证明 $A$ **不是**正规增殖的。

## 4. 增殖算子的延拓（I）

**4.1** 我们需要下面的定义：

**定义 4.1** 一个算子 $A_0$ 称为**稠密及增殖型的**（简短地，类型 d.a.），若

(i) $D(A_0)$ 是稠密的；

(ii) $A_0$ 是增殖的。

以一般的方式，若 $A_1$，$A_2$ 是在一 Hilbert 空间（不论什么空间都行！）中的两个无界算子，称 $A_1$ 是 $A_2$ 的一个**延拓**或**扩张**（写为 $A_1\supset A_2$），若

1°) $D(A_1)\supset D(A_2)$；

2°) $A_1u=A_2u$ 对一切在 $D(A_2)$ 中的 $u$ 成立。

于是，若 $A_0$ 是增殖的，如果 $A_1\supset A_0$ 且 $A_1$ 是增殖的，则 $A_1$ 是 $A_0$ 的一个**增殖的延拓**。

下面的定义是重要的：

**定义 4.2** 类型 d.a. 的 $A_0$ 的一个增殖的延拓 $A$ 称为最

**大的**，若不存在算子 $\tilde{A}$ 使

$$\tilde{A}\supset A\ (\text{严格地}),\ \tilde{A}\ \text{增殖}.$$

在本节及下一节我们将研究下面的问题：**给出一个类型 d.a. 的算子，是否允许最大增殖的延拓？**

如将看到的那样，此问题的解将同样地提供我们以在 N°3 的最后所提出的问题 1) 的解.

## 4.2 类型 d.a. 的算子的变形.

**引理 4.1** 若 $A_0$ 是 d.a. 的，有

$$|A_0u+\lambda u|\geqslant\lambda|u|,\quad \lambda>0,\ u\in D(A_0).$$

**证** 因为 $A_0$ 是增殖的，$\mathrm{Re}(A_0u+\lambda u,\ u)\geqslant\lambda|u|^2$，且因为 $|(A_0u+\lambda u,\ u)|\leqslant|(A_0+\lambda)u||u|$，就得到结果.

**结论** 对 $\lambda>0$，算子 $\lambda+A_0$ 是一对一的，可引入

$$J_0(\lambda)=(\lambda-A_0)(\lambda+A_0)^{-1}. \tag{4.1}$$

其定义域

$$D(J_0(\lambda))=R(\lambda+A_0). \tag{4.2}$$

（于此，一般地说，$R(B)=B$ 的"值域"$=B$ 作用于 $D(B)$ 的象.）

**引理 4.2** 若 $A_0$ 是 d.a. 的，则 $J_0(\lambda)$ 是一收缩算子.

**证** 设 $f\in D(J_0(\lambda))$，于是，由定义，

$$f=\lambda u+A_0u,\ u\in D(A_0), \tag{4.3}$$

且

$$J_0(\lambda)f=(\lambda-A_0)u. \tag{4.4}$$

因此

$$|J_0(\lambda)f|^2=\lambda^2|u|^2+|A_0u|^2-2\lambda\mathrm{Re}(A_0u,\ u),$$

$$|f|^2=\lambda^2|u|^2+|A_0u|^2+2\lambda\mathrm{Re}(A_0u,\ u).$$

由此，若 $A$ 是增殖的，就得到

$$|J_0(\lambda)f|\leqslant|f|.$$

**引理 4.3** $R(1+J_0(\lambda))=D(A_0)$.

证 事实上由(4.3)及(4.4),可导得

$$f+J_0(\lambda)f=2\lambda u. \tag{4.5}$$

**系 4.1** 若 $A$ 是 d. a. 的, 则 $R(1+J_0(\lambda))$ 在 $H$ 中稠密.

**引理 4.4** $1+J_0(\lambda)$ 是一对一的.

证 事实上,由(4.5)导得,若 $f+J_0(\lambda)f=0$,于是 $u=0$,因此由(4.3), $f=0$.

**注 4.1** 事实上, 仅仅由 $J_0(\lambda)$ 是一收缩算子且 $R(1+J_0(\lambda))$ 稠密的事实就能导得引理 4.4. 实际上有

**引理 4.5** 若 $J$ 是一收缩算子使 $R(1+J)$ 在 $H$ 中稠密,那末 $1+J$ 是一对一的.

证 设 $f\in D(J)$,且 $f+Jf=0$,并设 $g$ 在 $D(J)$ 中任意,对任意的 $z\in C$,有

$$|J(g-zf)|\leqslant|g-zf|,$$

即

$$|Jg|^2+|z|^2|Jf|^2-2\mathrm{Re}\,z(Jf,\ Jg)$$
$$\leqslant|g|^2+|z|^2|f|^2-2\mathrm{Re}\,z(f,\ g).$$

因为 $Jf=-f$,由此导得

$$2\mathrm{Re}\,z(f,\ g+Jg)\leqslant|g|^2-|Jg|^2. \tag{4.6}$$

固定 $g$ 且置 $2(f,\ g+Jg)=a\in C$. 于是(4.6)意味着:不管 $z\in C$ 怎样, 都有 $\mathrm{Re}(az)\leqslant$常数. 这仅当 $a=0$ 时才是可能的,因此$(f,\ g+Jg)=0$, 且这对任何 $g\in D(J)$ 都成立. 因为 $R(1+J)$ 是稠密的,这导至 $f=0$. 证毕.

可以将已经得到的结果摘要如下:

**命题 4.1** 若 $A_0$ 是类型 d. a. 的. 于是,对任何 $\lambda>0$,可由(4.1)定义 $J_0(\lambda)$; $J_0(\lambda)$ 是一收缩算子, $R(1+J_0(\lambda))$ 在 $H$ 中是稠密的,随之 $1+J_0(\lambda)$ 是一对一的.

可以称 $J_0(\lambda)$ 是 $A_0$ 的变形. 现在来考察是否能反过来由 $J_0(\lambda)$ 来定义 $A_0$.

由(4.3), (4.4)导得

$$(1-J_0(\lambda))f=2A_0u,$$

且由(4.5)(及由 $1+J_0(\lambda)$ 是一对一的事实)可导得

$$f=2\lambda(1+J_0(\lambda))^{-1}u.$$

由此得到:

若 $J_0(\lambda)$ 是一收缩算子, 使 $R(1+J_0(\lambda))$ 在 $H$ 中稠密, 由

$$(4.7)\qquad \begin{cases} A_0u=\lambda(1-J_0(\lambda))(1+J_0(\lambda))^{-1}u, \\ D(A_0)=R(1+J_0(\lambda)) \end{cases}$$

定义 $A_0$.

**引理 4.6** 算子 $A_0$ 是类型 d.a. 的.

**证** 因为 $D(A_0)=R(1+J_0(\lambda))$ 是稠密的, 仅需证明增殖性. 若 $u\in D(A_0)$, 有

$$u=h+J_0(\lambda)h,\ h\in D(J_0(\lambda)),$$

且于是

$$A_0u=h-J_0(\lambda)h,$$

因此

$$(A_0u,\ u)=|h|^2-|J_0(\lambda)h|^2+(h,\ J_0(\lambda)h)-(J_0(\lambda)h,\ h),$$

因此

$$\mathrm{Re}(A_0u,\ u)=|h|^2-|J_0(\lambda)h|^2\geqslant 0.$$

证毕.

于是已证明

**定理 4.1** 设 $A_0$ 是类型 d.a. 的. 对任何 $\lambda>0$, 变形 $J_0(\lambda)$(由(4.1)所定义)是收缩的, 而且 $R(1+J_0(\lambda))$ 稠密——且反之, 若 $J_0(\lambda)$ 是一收缩算子, 而且 $R(1+J_0(\lambda))$ 稠密, 由

(4.7)所定义的算子 $A_0$ 是类型 d.a.的.

现证明

**定理 4.2** 若 $A_0$ 是类型 d.a. 的，且 $J_0(\lambda)$ 是它的变形，$\lambda>0$ 固定. 于是"$A_0$ 闭"等价于"$J_0(\lambda)$ 闭".

**证** 1) 设 $A_0$ 闭. 设 $f_n\in D(J_0(\lambda))$ 而 $f_n\to f$, $J_0(\lambda)f_n\to g$ 在 $H$ 中成立, 要证明

$$f\in D(J_0(\lambda)) \quad 及 \quad g=J_0(\lambda)f. \tag{4.8}$$

但 $f_n$ 形如

$$f_n=\lambda u_n+A_0u_n,\quad u_n\in D(A_0),$$

且于是
$$J_0(\lambda)f_n=\lambda u_n-A_0u_n,$$

以致

$$u_n=\frac{1}{2\lambda}(f_n+J_0(\lambda)f_n)\to\frac{1}{2\lambda}(f+g),$$

$$A_0u_n=\frac{1}{2}(f_n-J_0(\lambda)f_n)\to\frac{1}{2}(f-g).$$

因为 $A_0$ 是闭的, 这导至 $\frac{1}{2\lambda}(f+g)=u\in D(A_0)$ 且

$$\frac{1}{2}(f-g)=A_0u.$$

因此 $f=\lambda u+A_0u\in D(J_0(\lambda))$ 及 $g=\lambda u-A_0u=J_0(\lambda)f$. 由此得到(4.8).

2) 设 $J_0(\lambda)$ 闭. 设 $u_n\in D(A_0)$ 而 $u_n\to u$, $A_0u_n\to V$ 在 $H$ 中成立, 要证明在此条件下 $u\in D(A_0)$ 及 $V=A_0u$. 但是能写 $u_n$ 为形式:

$$u_n=\frac{1}{2\lambda}(f_n+J_0(\lambda)f_n),\quad f_n\in D(J_0(\lambda));$$

于是

$$A_0u_n=\frac{1}{2}(f_n-J_0(\lambda)f_n),$$

且和 1)一样地进行推理.

## 5. 增殖算子的延拓(II)

**5.1** 借助于4.2的结果可将算子d.a.的增殖延拓问题化为 $R(1+J_0)$ 稠密的收缩算子 $J_0$ 的收缩延拓问题. 事实上, 现在有明显的等价性:

$$(5.1)\qquad \begin{cases} A\supset A_0 \\ A\text{ 增殖} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda>0\text{ 固定}, \\ J(\lambda)\supset J_0(\lambda), \\ J(\lambda)\text{ 收缩}. \end{cases}$$

(因此 $A$ 的变形 $J(\lambda)$ 是 $J(\lambda)$ 的逆变形 $A$!)

**注意** $\lambda>0$ 是任意固定的.

特别,

$$(5.2)\qquad \begin{cases} A\supset A_0 \\ A\text{ 最大增殖} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda>0\text{ 固定}, \\ J(\lambda)\supset J_0(\lambda), \\ J(\lambda)\text{ 收缩, 最大扩张}. \end{cases}$$

($J(\lambda)$ 为最大收缩扩张意味着: 不存在严格 $\supset J(\lambda)$ 的收缩.)

**5.2** 通过投影来进行收缩扩张是容易的. 首先引入

**引理5.1** 设 $J_0$ 是一收缩算子, 于是"$J_0$ 闭"等价于"$D(J_0)$ 闭".

**证** 1) 设 $J_0$ 闭. 设 $f_n\in D(J_0)$, $f_n\to f$ 在 $H$ 中成立, 因为 $|J_0(f_n-f_m)|\leqslant|f_n-f_m|$, 由此得到 $J_0f_n\to g$ 在 $H$ 中成立, 且因 $J_0$ 是闭的, $f\in D(J_0)$, 因此 $D(J_0)$ 是闭的.

2) 设 $D(J_0)$ 闭. 设 $f_n\to f$, $J_0f_n\to g$ 在 $H$ 中成立, $f_n\in D(J_0)$. 于是 $f\in D(J_0)$ 且 $|J_0(f_n-f)|\leqslant|f_n-f|\to 0$, 因此 $g=J_0f$. 证毕.

**一个收缩的闭包:** 若 $J_0$ 是一个收缩, 这是一个由装配以

由 $H$ 所导出的拓扑的 $D(J_0)$ 到 $H$ 中的线性连续算子；因此能由连续性延拓它为一个由 $\overline{D(J_0)} \to H$ 的线性连续算子 $\bar{J}_0$; $\bar{J}_0$ 是一个收缩，称为 $J_0$ 的**闭包**．根据引理 5.1，$\bar{J}_0$ 是闭的，因此总能假设 $J_0$ 是闭的．

**一个闭的收缩通过投影的扩张**：设 $J_0$ 是一个闭的收缩，于是 $D(J_0)$ 是闭的，且设

$$H = D(J_0) \oplus K. \tag{5.3}$$

用 $P$ 表示在 $D(J_0)$ 上正交投影的算子，且置

$$\bar{J} = J_0 \cdot P. \tag{5.4}$$

于是 $\bar{J} \supset J_0$，且 $\bar{J}$ 是一个收缩．

**引理 5.2** 当且仅当 $D(J) = H$ 时，一收缩 $J$ 不具有本身是一个收缩的任何严格的延拓．

**结果** 若 $J_0$ 是一个闭的收缩，由 (5.4) 所定义的 $\bar{J}$ 是一个最大的收缩延拓．回复到带等价性 (5.2) 的算子 $A_0$ 可由此导得．

**定理 5.1** 若 $A_0$ 是类型 d.a. 的，算子 $A_0$ 总允许最大增殖扩张．

现在来看根据什么来识别一个增殖扩张 $A$ 是最大的．按照引理 5.2，应有（必要充分条件）$D(J(\lambda)) = H$ 对一切 $\lambda > 0$ 成立，因而 $R(\lambda + A) = H$ 对一切 $\lambda > 0$ 成立．因此有

**定理 5.2** 一个类型 d.a. 的算子 $A$ 是最大的，当且仅当 $R(\lambda + A) = H$ 对一切 $\lambda > 0$ 成立．因此它的特征性质是

1) $A$ 闭，$D(A)$ 稠密；

2) $A$ 增殖；

3) $R(\lambda + A) = H$ 对一切 $\lambda > 0$ 成立．

**注 5.1** 由 1)，2)，3) 导得

$$|(A+\lambda)^{-1}|\leqslant\frac{1}{\lambda},\ \lambda>0.$$

由此导得(练习)

$$(5.5)\qquad |(A+p)^{-1}|\leqslant\frac{1}{\xi},\ p=\xi+i\eta,\ \xi>0.$$

但是由定理 3.2 及半群的无穷小生成元的一般性质(见第三章)可导得：若 $-A$ 是一收缩半群的无穷小生成元，则 $A$ 是最大增殖的. 因此有

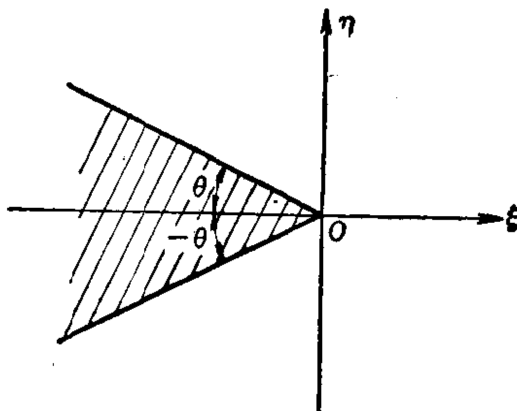
**定理 5.3** 使一算子 $A$ 是 d. a. 最大的，其充要条件是 $-A$ 是一收缩半群的无穷小生成元.

这同时还解决了 N° 3 的最后所提出的问题 1).

## 6. 正规增殖算子

**定理 6.1** 设 $A$ 正规增殖(见定义 3.3).

设 $0\leqslant\theta<\pi/2$ 由 $\mathrm{tg}\,\theta=\beta$ 所定义，而 $\beta$ 是在定义 3.2 的 (ii) 中所提到的. 设 $\sigma_\theta$ 是在图上加阴影线的闭扇形(张角 $2\theta$，由 $\xi<0$ 的坐标轴所二等分).




于是

1) $A+p$ 是可逆的，若 $p\notin\sigma_\theta$；

2) $|(A+p)^{-1}|\leqslant\dfrac{1}{d(p)}$，$d(p)=$由 $p$ 到 $\sigma_\theta$ 的距离.

**证** 对 $v\in D(A)$，

$$|\mathrm{Im}(Av,\ v)|=|\mathrm{Im}\,a(v,\ v)|\leqslant\beta\,\mathrm{Re}\,a(v,\ v)$$
$$=\beta\,\mathrm{Re}(Av,\ v).$$

因此复数$(Av, v)$属于集合 $-\sigma_\theta$($\sigma_\theta$ 关于原点的对称).

于是若 $u\in D(A)$, 且若 $v=u/|u|$, 对 $p\notin\sigma_\theta$, 有

$$|(Av, v)+p|=|p-(-(Av, v))|\geqslant d(p).$$

因为 $(v, v)=1$, $(Av, v)+p=((A+p)v, v)$, 因此

$$|((A+p)v, v)|\geqslant d(p),$$

且因为 $|((A+p)v, v)|\leqslant|(A+p)v||v|=|(A+p)v|$, 由此导得 $|(A+p)v|\geqslant d(p)$, 因此

$$|(A+p)u|\geqslant d(p)|u|, \quad u\in D(A), \quad p\notin\sigma_\theta. \tag{6.1}$$

因此 $A+p$ 是一对一的, 且 $R(A+p)$ 是闭的. 于是若证明了 $R(A+p)$ 是稠密的, 就能证明 1). 因此设 $v\in H$, 且对一切 $u\in D(A)$, $((A+p)u, v)=0$. 就得到

$$(Au, v)=-p(u, v),$$

因此 $v\in D(A^*)$ 且

$$(u, A^*v)=-p(u, v),$$

因此

$$A^*v+\bar{p}v=0.$$

(且 $A^*$ 由 $a^*(u, v)$ 所定义; 参见第四章定理 2.2.) 因此 $(A^*v, v)+\bar{p}|v|^2=0$ 等价于 $a^*(v, v)+\bar{p}|v|^2=0$, 即 $a(v, v)+p|v|^2=0$, 这导至

$$|\operatorname{Im} a(v, v)|=|\eta||v|^2\leqslant\beta\operatorname{Re} a(v, v)=-\beta\xi|v|^2,$$

因此

$$(|\eta|+\beta\xi)|v|^2\leqslant 0.$$

因为 $p\notin\sigma_\theta$, $|\eta|+\beta\xi>0$, 因此 $v=0$. 因此由(6.1)就有 1) 及 2).

我们指出——但这儿我们不允许更多地坚持在这个主题上——在这些条件下, $-A$ 是一个收缩的解析半群 $G(t)$ 的无穷小生成元, 即, 半群 $G(t)$ 对 $t$ 在包含正半轴的复平面的一个区域中允许一个延拓.

## 关于第五章的注记

N° 1 及 2 给出半群的理论到与第四章所遇到的微分算子有联系的(抛物)发展型方程上的应用. 对于 Laplace 变换的(相近的)观点, 可参看 H. G. Garnir, Les problèmes aux limites de la Physique Mathématique, Basel, Birkhauser, 1958; J. L. Lions 的文章, Acta. Math., 94(1955), p.13～153, 第二章及书, Springer, 1961, 第十一章.

若 $A$ 是增殖的(见 N° 3), $-A$ 称为**耗散的**(不要与遍历理论中称为耗散的算子混淆起来! 参见 Halmos, Lectures on Ergodic Theory, The Math. Soc. of Japan, 1956, 或 E. Hopf, Ergoden Théorie, New York, 1948). N° 4 的结果应归功于 R. S. Phillips, Trans. Amer. Math. Soc. 90(1959), p. 193～254; Comm. Pure Applied Maths. 12 (1959), p. 249～276. 定理 5.1 已由 C. Foias 用一不同的方法独立地得到(未发表). 归功于 Phillips 的 N°4 的方法(主要在于结合一个收缩于一个增殖算子), 显然是类似于对一个对称算子的自共轭扩张的研究的 Cayley 变换的 Von Neumann 方法以及对一对称算子的正的自共轭扩张的研究的 Von Neumann 方法的"实"的类似, M. Krein 的方法. (参看, 例如说, Riesz-Nagy 的书.) 对于"所有"的最大增殖延拓, 我们可回到 Phillips 的工作, 见上面的引文.

我们借用定理 6.1 于 T. Kato, Fractional powers of dissipative operators, Journal of the Math. Soc. of Japan, Vol. 13(1961), p. 246～274, 为了完整起见我们可回到他的原文. 由 T. Kato 及作者在同一杂志 Vo.l 4(1962)中的短文来补足它.

# 第6章

# 强制性问题

## 1. 化约定理

在本节中要表述一个具有很一般性特征的结果，它本质上是将在 $R^n$ 的一开集上对变系数算子的强制性问题化到在半直线]0, ∞[上对常系数算子的强制性问题，这结果的证明占据 N° 3～5.

### 1.1 记号

为了技术上的理由，置

$$\partial_j = -i\partial/\partial x_j,$$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}, \text{ 于此 } \alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

将是方便的.

对于 $u, v \in H^m(\Omega)$, $\Omega$ 是 $R^n$ 的开集，置

$$(1.1) \qquad a(u, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)\partial^\alpha u \overline{\partial^\beta v}\, dx,$$

且用 $\mathscr{A}(u, v)$ 表示 $a(u, v)$ 的**主部**：

$$(1.2) \qquad \mathscr{A}(u, v) = \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)\partial^\alpha u \overline{\partial^\beta v}\, dx.$$

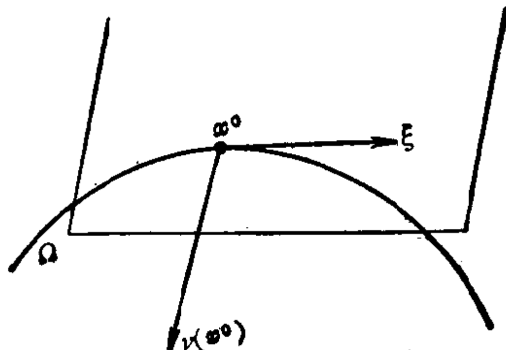
假设：

(1.3) $\begin{cases} \Omega \text{ 是一有界开集，具有 } n-1 \text{ 维的且 } m \text{ 次连续} \\ \text{可微的边界 } \Gamma, \Omega \text{ 在 } \Gamma \text{ 的单侧;} \end{cases}$

(1.4) $a_{\alpha\beta} \in C^0(\overline{\Omega})$（在 $\overline{\Omega}$ 中的连续函数的空间）.

泛函 $\mathscr{A}_{x^0,\xi}(f, g)$.

设 $x^0\in\Gamma$, $\nu(x^0)$ 为 $x^0$ 处 $\Gamma$ 的法线, 指向 $\Omega$ 的内部, $\xi$ 是 $x^0$ 处切于 $\Gamma$ 的超平面上的向量.




对 $f$, $g\in H^m(0, \infty)$, 置

$$\mathscr{A}_{x^0,\xi}(f, g)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_0^\infty a_{\alpha\beta}(x^0)\,(\xi+\nu(x^0)\partial_t)^\alpha f(t)\cdot(\xi+\nu(x^0)\partial_t)^\beta g(t)dt, \tag{1.5}$$

于此

$$\partial_t=-i\frac{d}{dt},$$

且

$$(\xi+\nu(x^0)\partial_t)^\alpha=(\xi_1+\nu_1(x^0)\partial_t)^{\alpha_1}\cdots(\xi_n+\nu_n(x^0)\partial_t)^{\alpha_n},$$

于此

$$\nu_j(x^0)=\nu(x^0)\text{的第 } j \text{ 个分量}.$$

边界算子 $B_j$:

$$B_j(x, \partial)=\sum_{|\alpha|\leq m_j}b_{j\alpha}(x)\partial^\alpha, \tag{1.6}$$

于此

$$m_j<m, \tag{1.7}$$

且

$$b_{j\alpha}\in C^{m-m_j}(\overline{\Omega}). \tag{1.8}$$

用 $B'_j(x, \partial)$ 表示 $B_j(x, \partial)$ 的主部, 即

(1.9) $$B'_j(x, \partial)=\sum_{|\alpha|=m_j} b_{j\alpha}(x)\partial^\alpha.$$

假设这些 $B_j$ 个数为 $p$, $0\leqslant p\leqslant m$, 且

(1.10) 这些 $B_j$ 形成一个**正规系统**(即若 $j\neq k$,则 $m_j\neq m_k$,且对 $x^0\in\Gamma$, $B'_j(x^0, \nu(x^0))\neq 0$).

## 1.2 化约定理的陈述

**定理 1.1** 设 (1.3), (1.4), (1.8)及(1.10)成立, 此外作下面两个假设($C_j$ 表示 $>0$ 的常数):

(i) 存在 $C_1$ 及 $C_2$ 使

$\mathrm{Re}\, a(\varphi, \varphi)\geqslant C_1\|\varphi\|^2-C_2|\varphi|^2$ 对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$成立.

(ii) 对一切 $x^0\in\Gamma$ 及正交于 $\nu(x^0)$的 $\xi$, 存在一个常数 $C_3=C_3(x^0, \xi)$使

$$\mathrm{Re}\mathscr{A}_{x^0,\xi}(f, f)\geqslant C_3\|f\|^2_{H^m(0,\infty)}$$

对一切满足

$$B'_j(x^0, \xi+\nu(x^0)\partial_t)f(0)=0, \quad j=1, \cdots, p,$$

的 $f\in H^m(0, \infty)$ 成立.

**结论** 存在 $C_4$ 及 $C_5$ 使

(1.11) $$\mathrm{Re}\, a(v, v)\geqslant C_4\|v\|^2-C_5|v|^2$$

对一切满足

(1.12) $$B_j(x, \partial)v|_\Gamma=0, \quad j=1, \cdots, p,$$

的 $v\in H^m(\Omega)$成立.

(注意,由于 $m_j<m$ 的事实, (1.12)有意义).

**注 1.1** 假设(i)是一个在 $\Omega$ 的"内部"的假设, 而(ii)是"在边界上"的假设.

自然地接着(这将是本章的第二部分)应该给出使(i), (ii)成立的代数条件.

**注意** 我们指出条件(i)及(ii)同样是必要的，这儿我们不致力于这一点，参见本章最后的注记.

## 2. 两 个 引 理

**引理2.1** 设 $W$ 是一个 Hilbert 空间(模 $\|w\|$)，$B$ 是一个由 $W$ 到 $F$ 的线性连续且在上的算子，$F$ 是一 Banach 空间(模 $\|f\|_F$). 设 $V$ 是 $B$ 的核(即，使 $Bw=0$ 的 $w\in W$ 的集合). 最后设 $a(u, v)$ 是 $W\times W$ 上的一个双线性连续泛函，使

(2.1) $\operatorname{Re} a(v, v)\geqslant C\|v\|^2$ 对一切 $v\in V$ 成立，$C>0$.

那末，存在常数 $C_1$ 及 $C_2$ 使

$$\operatorname{Re} a(w, w)\geqslant C_1\|w\|^2-C_2\|Bw\|_F^2 \tag{2.2}$$

对一切 $w\in W$ 成立.

**证** 设 $W=V\oplus Z$，那末 $B\in\mathscr{L}(Z; F)$ 是在上的和一对一的，因此是一个同构，因此

$$\|Bz\|_F\geqslant C_3\|z\|,\ z\in Z. \tag{2.3}$$

于是，若 $w\in W$, $w=v+z$, $v\in V$, $z\in Z$，有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} a(w, w)&=\operatorname{Re} a(v, v)+\operatorname{Re} a(z, z)+\operatorname{Re} a(v, z)\\&\quad+\operatorname{Re} a(z, v)\\&\geqslant C\|v\|^2-C_4\|z\|^2-C_4\|v\|\,\|z\|\\&\geqslant \frac{C}{2}\|v\|^2-C_5\|z\|^2\\&\geqslant \frac{C}{2}\|v\|^2-C_6\|Bz\|_F^2(\text{根据}(2.3)),\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\|v\|^2&=\|w\|^2+\|z\|^2-2\operatorname{Re}((w, z))\\&\geqslant\frac{1}{2}\|w\|^2-\|z\|^2\geqslant\frac{1}{2}\|w\|^2-\frac{1}{C_3}\|Bz\|_F^2,\end{aligned}$$

由此得到

$$\operatorname{Re} a(w, w) \geqslant \frac{C}{4}\|w\|^2 - C_7\|Bz\|_F^2,$$

且因为 $Bz=Bw$，就有(2.2)。

**注 2.1** 若 $B(W)$ 在 $F$ 中是闭的，有同样的结果(及同样的证明)．对 Banach 空间的情况，见下面的补充．

**引理 2.2** 设 $A$, $B$, $C$ 是三个 Banach 空间，而 $A\subset B\subset C$, 由 $B$ 到 $C$ 中的嵌入是连续的，且由 $A$ 到 $B$ 中的嵌入是紧致的．于是，对一切 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon$ 使

(2.4) $\qquad \|a\|_B \leqslant \varepsilon\|a\|_A + C_\varepsilon\|a\|_C$ 对一切 $a\in A$ 成立．

**证** 设(2.4)不真．于是，对某个 $\varepsilon>0$，将存在 $a_n\in A$ 及 $\lambda_n\to+\infty$，使

$$\|a_n\|_B \geqslant \varepsilon\|a_n\|_A + \lambda_n\|a_n\|_C.$$

若 $v_n = a_n/\|a_n\|_A$，于是有

(2.5) $\qquad \|v_n\|_B \geqslant \varepsilon + \lambda_n\|v_n\|_C,\quad \|v_n\|_A = 1.$

因 $A\subset B$，且 $\|v_n\|_A=1$，$v_n$ 落在 $B$ 的一个球中，结果(2.5)导至

(2.6) $\qquad \|v_n\|_C \to 0.$

但因为 $\|v_n\|_A=1$ 及 $A\to B$ 是紧致的，能抽出 $v_i$ 使 $v_i\to v$ 在 $B$ 中强收敛．根据(2.6)，$v=0$，因此 $\|v_i\|_B\to 0$；但根据(2.5)，$\|v_i\|_B\geqslant\varepsilon$，由此得到矛盾而证明了引理．

**补充**

**引理 2.3** 设 $E$, $H$ 是两个 Banach 空间，$E\subset H$，$E\to H$ 连续．分别用 $\|\ \|$($|\ |$)表示在 $E$($H$)中的模．设 $F$ 是第三个 Banach 空间，模 $\|\ \|_F$，给出 $A$, $B$ 使

$$A\in\mathscr{L}(E; H),\quad B\in\mathscr{L}(E; F),$$

且用 $E_0$ 表示 $B$ 的核．作出下面的假设：

1) $|Ae_0|+|e_0|\geqslant c_1\|e_0\|$ 对一切 $e_0\in E_0$ 成立;

2) $E_0$ 在 $E$ 中允许一拓扑的补充:

$$E=E_0\dot{+}X;$$

3) $B$ 由 $E\to F$ 是在上的.

结论

$|Ae|+|e|+\|Be\|_F\geqslant c_2\|e\|$ 对一切 $e\in E$ 成立.

证 由 2), 3) 及 $E_0$ 是 $B$ 的核的事实, 得到 $B$ 是由 $X$ 到 $F$ 上的一个同构, 因此

$$\|Bx\|_F\geqslant c_3\|x\|,\ x\in X.$$

设 $e$ 在 $E$ 中任意; 按照 2), $e=e_0+x$ 是它的分解; 计算 ($\lambda>0$ 待定)

$$|Ae|+|e|+\lambda\|Be\|_F=|Ae|+|e|+\lambda\|Bx\|_F$$
$$\geqslant|Ae_0|+|e_0|-|Ax|-|x|+\lambda c_3\|x\|,$$

因此, 由 1),

$$\geqslant c_1\|e_0\|+\lambda c_3\|x\|-c_4\|x\| \quad (\text{因为 } A\in\mathscr{L}(E;H))$$
$$\geqslant c_1(\|e_0\|+\|x\|) \quad (\text{选取 } \lambda c_3=c_4+c_1)$$
$$\geqslant c_1\|e\|,$$

由此得到结果.

**例** $E=W^{2m,p}(\Omega)$, $H=L^p(\Omega)$,

$A=2m$ 阶的椭圆微分算子,

$$F=\prod_{j=0}^{m-1}W^{2m-j-1/p,p}(\Gamma),$$

$$Bu=\{\gamma_0 u,\ \gamma_1 u,\ \cdots,\ \gamma_{m-1}u\}.$$

因此 $E_0=W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$. 能证明 1); 由第三章得到 3); 现在来验证 2). 根据第三章(更精确地, …, 根据第三章中未述及的事情), 存在一个由 $F\to W^{2m,p}(\Omega)$ 的线性连续映射 $f\to Pf$ 使 $BPf=f$. 于是 $u=(u-PBu)+PBu$ 给出所

要求的分解. 当 $B_j$ 形成一正规系统时，这个附注是有效的.

## 3. 半空间的情况；常系数

记号和假设:

$$x=\{x',\ t\},\ x'=\{x_1,\ \cdots,\ x_{n-1}\},\ (x_n=t);$$

$$\xi=\{\xi_1,\ \cdots,\ \xi_{n-1}\};$$

$$\Omega=\{x\,|\,t>0\};$$

$$Q(u,\ v)=\sum_{|\alpha|+j=|\beta|+k=m} q_{\alpha\beta}^{jk}\int_{\Omega}\partial_{x'}^{\alpha}\partial_t^j u\cdot\overline{\partial_{x'}^{\beta}\partial_t^k v}\,dx'dt, \tag{3.1}$$

$$q_{\alpha\beta}^{jk}\in C$$

(因此 $Q(u,\ v)$ 是一常系数的齐次泛函);

(3.2) $B_j(\partial_{x'},\ \partial_t)=$ 常系数的 $m_j$ 次的齐次算子.

最后假设对一切 $\xi$, 存在一个常数 $c(\xi)=c$ 使

$$\operatorname{Re}Q_\xi(f,\ f)\geqslant c\|f\|_{H^m(0,\infty)}^2 \tag{3.3}$$

对一切满足

$$B_j(\xi,\ \partial_t)f(0)=0,\quad j=1,\ \cdots,\ p, \tag{3.4}$$

的 $f\in H^m(0,\ \infty)$ 成立, 于此

$$Q_\xi(f,\ g)=\sum_{|\alpha|+j=|\beta|+k=m} q_{\alpha\beta}^{jk}\int_0^\infty \xi^\alpha\xi^\beta\partial^j f\cdot\overline{\partial_g^k}\,dt. \tag{3.5}$$

现在来证明

**引理 3.1** 设成立(3.1), ⋯, (3.5), 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}Q(u,\ u) &\geqslant C_1\|u\|^2-C_2\sum_{j=1}^{p}\|B_j(\partial_{x'},\ \partial_t)u|_{t=0}\|_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})}^2\\ &\quad -C_3|u|^2\end{aligned} \tag{3.6}$$

对一切 $u\in H^m(\Omega)$ 成立.

**证** 设 $v\in H^m(\Omega)$ 使

$$B_j(\partial_{x'},\ \partial_t)v|_{t=0}=0,\quad j=1,\ \cdots,\ p\ 成立.$$

$\hat{V}(\xi,\ t)$ 是其关于 $x'$ 的 Fourier 变换; 于是

$$Q(V,\ V)=\int_{R_\xi^{n-1}}Q_\xi(\hat{V}(\xi,\ t),\ \hat{V}(\xi,\ t))d\xi.$$

但

$$\begin{aligned}&Q_\xi(f,\ f)\\&=\sum q_{\alpha\beta}^{jk}\int_0^\infty\xi^\alpha\xi^\beta|\xi|^{j+k}\partial^j(f(t/|\xi|))\overline{\partial^k(f(t/|\xi|))}\frac{1}{|\xi|}dt\\&=|\xi|^{2m-1}Q_{\xi/|\xi|}(f(t/|\xi|),\ f(t/|\xi|)).\end{aligned}$$

由假设(3.3)导得

$$\operatorname{Re}Q_\xi(f,\ f)\geqslant C\|f\|_{H^m(0,\infty)}^2,$$

且对一切满足 $|\xi|=1$ 的 $\xi$ 具同一常数. 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}Q(V,\ V)&\geqslant C\sum_{j=0}^m\int_{R^{n-1}}|\xi|^{2m-1}\int_0^\infty|\partial^j(\hat{V}(\xi,\ t/|\xi|))|^2dt\,d\xi\\&=C\sum_{j=0}^m\int_{R^{n-1}}|\xi|^{2m-2j}\int_0^\infty|\partial^j\hat{V}(\xi,\ t)|^2dt\,d\xi,\end{aligned}$$

由此得到

$$\operatorname{Re}Q(V,\ V)\geqslant C\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|D^\alpha v|^2dx \tag{3.7}$$

对一切满足

$$B_j(\partial_{x'},\ \partial_t)v|_{t=0}=0,\quad j=1,\ \cdots,\ p, \tag{3.8}$$

的 $v\in H^m(\Omega)$ 成立.

于是应用引理 2.1 于:

$W=H^m(\Omega)$,

$V=$ 满足(3.8)的 $v\in H^m(\Omega)$ 的空间;

$B=\{B,\ \cdots,\ B_p\}$,

$F=\prod_{j=1}^pH^{m-m_j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$(参阅第三章 N° 11)

根据$\{B_j\}$是正规的事实，$B$ 是在上的；

$a(u, v)=Q(u, v)+\varepsilon(u, v)$，$\varepsilon>0$ 任意.

由此导得(3.6)。

## 4．半球的情况；变系数

用 $\Omega$ 表示半球：$x'^2+t^2<R^2$, $t>0$.

考虑

$$(4.1)\quad a(u, v)=\sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m\\|\beta|+k\leq m}}\int_\Omega a_{\alpha\beta}^{jk}(x', t)\partial_{x'}^\alpha\partial_t^j u\cdot\overline{\partial_{x'}^\beta\partial_t^k v}dx'\,dt.$$

将置

$$x^0=(y^0, 0),\quad y^0\in R^{n-1},\quad |y^0|<R,$$

$$(4.2)\quad \mathscr{A}_{x^0}(u, v)=\sum_{\substack{|\alpha|+j=m\\|\beta|+k=m}}\int_\Omega a_{\alpha\beta}^{jk}(y^0, 0)\partial_{x'}^\alpha\partial_t^j u\cdot\overline{\partial_{x'}^\beta\partial_t^k v}dx'\,dt.$$

考虑形如 $B_j(x, \partial_{x'}\partial_t)$ 的 $B_j$，而 $B_j'$ 是 $B_j$ 的主部.

**引理 4.1** 假设定理 1.1 中的(i)成立及定理 1.1 中的(ii)对一切 $x^0=(y^0, 0)$ 成立，于是

$$(4.3)\quad \operatorname{Re} a(u, u)\geq c_1\|u\|^2-c_2\sum_{j=1}^p\|B_ju|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)}-c_2|u|^2$$

对一切在 $\partial\Omega-\Sigma$ 的邻域中$\equiv0$ 的 $u\in H^m(\Omega)$ 成立.

($\partial\Omega=\Omega$ 的边界，$\Sigma=\partial\Omega$ 的包含在 $t=0$ 中的部分.)

**证** 1) 若 $u$ 的支集 $\subset\Omega$，无须证明(参见定理 1.1 的(i))．于是假设 $x^0=(y^0, 0)\in u$ 的支集，且首先假设此支集包含在半球$(x'-y^0)^2+t^2\leq\delta^2$ 之中.

能写出

$$(4.4)\quad a(u, u)=\mathscr{A}_{x^0}(u, u)+\mathscr{B}(u, u)+\mathscr{B}'(u, u),$$

于此

(4.5) $\mathscr{B}(u, u)$

$$=\sum_{\substack{|\alpha|+j=m\\|\beta|+k=m}}\int_{\Omega}[a_{\alpha\beta}^{jk}(x', t)-a_{\alpha\beta}^{jk}(y^0, 0)]\partial_{x'}^{\alpha}\partial_t^j u\partial_{x'}^{\beta}\partial_t^k u dx'dt$$

且于此

$\mathscr{B}'(u, u)$ = 包含导数的乘积 $D^{\gamma}u\cdot D^{\gamma'}u$ 的二次型，而

$$|\gamma|\leqslant m,\ |\gamma'|\leqslant m,\ |\gamma|+|\gamma'|\leqslant 2m-1.$$

皆记

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}=\|u\|_k,\ |u|=\|u\|_0.$$

于是

(4.6) $$|\mathscr{B}'(u, u)|\leqslant c_3\|u\|_m\|u\|_{m-1}.$$

设

$$\omega(\delta)=\max\cdot(\omega_1(\delta),\ \omega_2(\delta)),$$

$$\omega_1(\delta)=\max_{\substack{|\alpha|+j=m\\|\beta|+k=m}}\sup_{(x'-y^0)^2+t^2<\delta^2}|a_{\alpha\beta}^{jk}(x', t)-a_{\alpha\beta}^{jk}(y^0, 0)|,$$

$$\omega_2(\delta)=\max_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\|\alpha|=m_j}}\sup_{(x'-y^0)^2+t^2<\delta^2}|b_{j\alpha}(x', t)-b_{j\alpha}(y^0, 0)|.$$

于是

(4.7) $$|\mathscr{B}(u, u)|\leqslant c_4\omega(\delta)\|u\|_m^2.$$

且根据引理3.1有

$$\mathrm{Re}\,\mathscr{A}_{x^0}(u, u)$$

$$\geqslant c_5\|u\|_m^2-c_6\sum_{j=1}^{p}\|B_j'(x^0, \partial_{x'}, \partial_t)u|_{t=0}\|_{H^{m-m_j-1}(\Sigma)}^2$$

$$-c_6|u|^2,$$

由此，代入(4.4)中并利用(4.6)，(4.7)，就得到

(4.8) $$\mathrm{Re}\,a(u, u)\geqslant c_5\|u\|_m^2-c_3\|u\|_m\|u\|_{m-1}-c_4\omega(\delta)\|u\|_m^2$$

$$-c_6|u|^2-c_6\sum_{j=1}^{p}\|B_j'(x^0, \partial_{x'}, \partial_t)u|_{t=0}\|_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2$$

暂时承认

**引理 4.2** 有

$$\|B'_j(x^0, \partial_{x'}, \partial_t)u|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)}$$
$$\leqslant \|B_j(x, \partial_{x'}, \partial_t)u|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)}$$
$$+c_7\omega(\delta)\|u\|^2_m+c_8\|u\|^2_{m-1}$$

在(4.8)中利用引理 4.2. 利用

$$2\|u\|_m\|u\|_{m-1}\leqslant\delta\|u\|^2_m+\frac{1}{\delta}\|u\|^2_{m-1},$$

由此导得

$$(4.9)\quad \operatorname{Re} a(u, u)\geqslant c_5\|u\|^2_m-c_9(\delta+\omega(\delta))\|u\|^2_m$$
$$-c_{10}(\delta)\|u\|^2_{m-1}-c_6\sum_{j=1}^{p}\|B_j(x, \partial_{x'}, \partial_t)u|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)}$$

对 $A=H^m(\Omega), B=H^{m-1}(\Omega), C=L^2(\Omega)$, 利用引理 2.2; $A\to B$ 是紧致的(参见第二章 N° 7). 因此, 例如说,

$$\|u\|^2_{m-1}\leqslant c_9\delta\|u\|^2_m+c_{11}(\delta)|u|^2,$$

且代入(4.9)中得

$$\operatorname{Re} a(u, u)\geqslant[c_5-c_9(2\delta+\omega(\delta))]\|u\|^2_m-c_{11}(\delta)|u|^2$$
$$-c_6\sum_{j=1}^{p}\|B_j(x, \partial_{x'}, \partial_t)u|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

选择 $\delta$ 足够小, 使得, 例如说,

$$c_5-c_9(2\delta+\omega(\delta))=c_5/2,$$

因此, 一旦 $u$ 的支集被包含在 $(x'-y^0)^2+t^2\leqslant\delta^2$, $\delta\leqslant\delta_0$, 中就已经证明了(4.3), 而常数与 $y^0$ 无关.

2) 设 $h_1, \cdots, h_N$ 是实的 $\mathscr{D}(R^n)$ 的函数, 使 $\sum_{i=1}^{N}h_i^2=1$ 在 $\overline{\Omega}$ 的一邻域中成立. $h_2, \cdots, h_N$ 的支集包含在中心在 $\Sigma$ 上、半径为 $\delta_0$ 的球中. 于是

$$u=\sum_{i=1}^{N} uh_i^2,$$

且通过简单的计算有

$$(4.10)\quad \begin{cases} a(u,\ u)=a\left(\sum_{i=1}^{N} uh_i^2,\ u\right)-\sum_{i=1}^{N} a(u_i,\ u_i)+r(u,\ u), \\ u_i=uh_i, \\ |r(u,\ u)|\leqslant c_{12}\|u\|_m\|u\|_{m-1}. \end{cases}$$

但是 $u_1$ 在 $\Omega$ 中是紧致支集的，且对 $u_i$, $i\geqslant 2$, 可以应用 1). 因此

$$(4.11)\qquad \operatorname{Re} a(u,\ u)\geqslant c_1\sum_{i=1}^{N}\|u_i\|_m^2 - c_2\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=2}^{N}\|B_j u_i|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)} - c_2\sum_{i=1}^{N}|u_i|^2 - c_{12}\|u\|_m\|u\|_{m-1}.$$

但是(请验证!)

$$(4.11')\qquad \sum_{i=1}^{N}\|u_i\|_m^2\geqslant\|u\|_m^2-c_{13}\|u\|_m\|u\|_{m-1},$$

结果(4.11)导致

$$(4.12)\quad \operatorname{Re} a(u,\ u)\geqslant c_1\|u\|_m^2-c_{14}\|u\|_m\|u\|_{m-1}-c_{15}|u|^2 - c_2\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{P}\|B_j(x,\ \partial_{x'},\partial_t)u_i|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

暂时承认

**引理 4.3** 有

$$\|B_j(x,\ \partial_{x'},\ \partial_t)u_i|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant c_{16}\left(\|B_j(x,\ \partial_{x'},\ \partial_t)u|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Omega)} + \|u\|_{m-1}^2\right).$$

于是(4.12)给出:

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant c_1\|u\|_m^2 - c_{14}\|u\|_m\|u\|_{m-1} - pc_{16}\|u\|_{m-1}^2$$

$$-c_{15}|u|^2 - c_{16}\sum_{j=1}^{p}\|B_j(x, \partial_{x'}, \partial_t)u|_{t=0}\|_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2.$$

利用事实(已在1)中利用过

$$\|u\|_{m-1}^2 \leqslant \varepsilon\|u\|_m^2 + c(\varepsilon)\|u\|^2,$$

就由此得到结果.

**引理4.2的证明** 能写出:

$$B_j'(x^0, \partial_{x'}, \partial_t)u = Ru + Su + B_j(x, \partial_{x'}, \partial_t)u,$$

于此

$$Su = [B_j'(x^0, \partial_{x'}, \partial_t) - B_j'(x, \partial_{x'}, \partial_t)]u,$$

$$Ru = [B_j'(x, \partial_{x'}, \partial_t) - B_j(x, \partial_{x'}, \partial_t)]u.$$

但 $R$ 是 $m_j-1$ 阶的,因此 $u \to Ru|_{t=0}$ 是由

$$H^{m-1}(\Omega) \to H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)$$

的连续映射,因此

$$\|Bu|_{t=0}\|_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant c\|u\|_{m-1}. \tag{4.13}$$

其次,根据 $\omega(\delta)$ 的定义,

$$\|Su\|_{H^{m-m_j}(\Omega)} \leqslant c\omega(\delta)\|u\|_m,$$

由此

$$\|Su|_{t=0}\|_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant c\|Su\|_{H^{m-m_j}(\Omega)} \leqslant c\omega(\delta)\|u\|_m,$$

由此就得到结果.

**引理4.3的证明** 事实上,

$$B_j(x, \partial_{x'}, \partial_t)u_i = h_i B_j(x, \partial_{x'}, \partial_t)u + R_j u,$$

$R_j$ 是 $m_j-1$ 阶的,因此

$$\|R_j u|_{t=0}\|_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant c\|u\|_{m-1},$$

如同对(4.13)一样,由此得到引理.

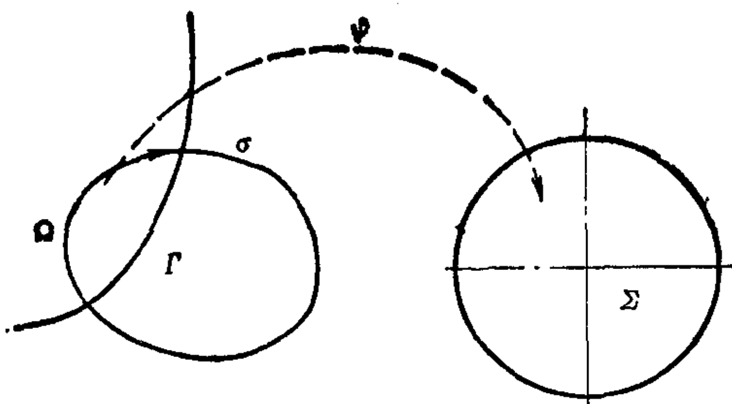
## 5. 定理1.1的证明

设 $h_0, h_1, \cdots, h_N$ 是一族实的 $\mathscr{D}(R^n)$ 中的函数，使

$$\sum_{i=0}^{N} h_i^2 = 1$$

在 $\bar{\Omega}$ 的一邻域中成立.

$h_0$ 在 $\Omega$ 中是紧致支集的，$h_r$, $r=1, \cdots, N$ 的支集在一开集 $\sigma$ 中，使通过 $\psi$ 将 $\sigma\cap\Omega$ 映照于一(正的)半球中，将 $\sigma\cap C\bar{\Omega}$ 映照于一负的半球中，而 $\sigma\cap\Gamma\to\Sigma$, $\psi$ 及 $\psi^{-1}$ 是 $m$ 次连续可微的.




置 $$u_i = uh_i.$$

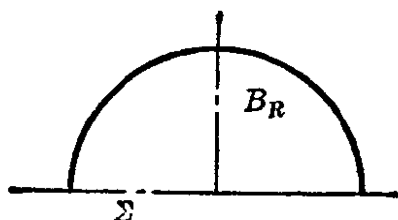
如同(4.10)有

(5.1) $$\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant \sum_{r=0}^{N} \operatorname{Re} a(u_r, u_r) - c_6 \|u\|_m \|u\|_{m-1}.$$

因为 $u_0$ 是在 $\Omega$ 中紧致支集的，有(根据(i))

(5.2) $$\operatorname{Re} a(u_0, u_0) \geqslant c_1 \|u_0\|_m^2 - c_2 |u_0|^2.$$

通过 $\psi$, 函数 $u_r$ 化为 $u_r^*$, $\in H^m(B_R)$ ($B_R$ 是半径为 $R$ 的上半球)，在 $\partial B_R - \Sigma$ 的邻域中 $u_r^* \equiv 0$, 且 $a(u_r, u_r) = a^*(u_r^*, u_r^*)$, $a^*$ = 通过 $\psi$ 所变换过来的泛函.




对于边界点 $x^0=(y^0, 0)$，通过局部化，条件(ii)变换为类似的条件．因此，根据引理 4.1，有

$$(5.3)\quad \operatorname{Re} a^*(u_r^*, u_r^*) \geqslant c_7 \|u_r^*\|_m^2 - c_8 \sum_{j=1}^{p} \|B_j^*(x, \partial_{x'}, \partial_t) u_r^*|_{t=0}\|^2_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)} - c_8 |u_r^*|^2$$

(于此 $B_j^*$ 是 $B_j$ 在局部图象中的变形)．

但是我们关心的是使

$$(5.4)\quad B_j u|_\Gamma = 0$$

成立的 $u$(见(1.12))．但是

$$B_j(h_r u) = h_r B_j u + S_{jr} u,\quad S_{jr} \text{ 为 } m_j-1 \text{ 阶},$$

且因此

$$B_j(h_r u) = B_j(u_r) = S_{jr} u,$$

由此

$$B_j^* u_r^* = (S_{jr} u)^* \quad (\text{通过局部图象的映象})$$

且 $S_{jr}$ 是 $m_j-1$ 阶的，

$$\|(S_{jr} u)^*\|_{H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leqslant c_9 \|u\|_{m-1}.$$

因此(5.3)给出

$$(5.5)\quad \operatorname{Re} a(u_r, u_r) = \operatorname{Re} a^*(u_r^*, u_r^*) \geqslant c_7 \|u_r^*\|_m^2 - c_{10} \|u\|_{m-1}^2.$$

由此连同(5.1)及(5.2)得到

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant c_{11} \sum_{r=0}^{N} \|u_r\|_m^2 - c_6 \|u\|_m \|u\|_{m-1} - c_{10} \|u\|_{m-1}^2,$$

再利用(4.11′)及

$$\|u\|_{m-1} \leqslant \varepsilon \|u\|_m + c(\varepsilon) |u|,$$

就导得定理.

现在剩下来要给出导致定理 1.1 的假设(i)及(ii)的代数条件.

## 6. 定理1.1的假设(i)

**定理6.1** 关于系数及边界的正规性的假设同定理 1.1. 假设成立

(6.1) $$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\eta^{\alpha+\beta}\geqslant c_1|\eta|^{2m},\quad \eta\in R^n,\ c_1>0,$$

那末定理 1.1 的假设(i)成立.

证 设 $h_1, \cdots, h_N$ 是实的 $\mathscr{D}(R^n)$ 中的一族函数, 使 $\sum h_i^2=1$ 在 $\overline{\Omega}$ 的一个邻域中成立, $h_i$ 的支集的直径 $\leqslant\delta$, 且设 $u\in H^m(\Omega)$ 在 $\Omega$ 中为紧致支集. 于是, 若 $u_r=h_r u$. 有(见(4.10))

(6.2) $$\mathrm{Re}\, a(u, u)\geqslant\sum_{r=1}^{N}\mathrm{Re}\, a(u_r, u_r)-c_2\|u\|_m\|u\|_{m-1}.$$

设 $x^0\in h_r$ 的支集,

(6.3) $$\mathscr{A}_{x^0}(u, v)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x^0)\partial^\alpha u\overline{\partial^\beta v}\,dx.$$

有

(6.4) $$a(u_r, u_r)=\mathscr{A}_{x^0}(u_r, u_r)+[\mathscr{A}(u_r, u_r)-\mathscr{A}_{x^0}(u_r, u_r)]+S(u_r, u_r),$$

于此

$$\mathscr{A}(u, v)=\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)\partial^\alpha u\overline{\partial^\beta v}\,dx,$$

$$|S(u, u)|\leqslant c_3\|u\|_m\|u\|_{m-1}.$$

若 $\omega(\delta)$是如 N° 4 一样地被定义(事实上, 这儿 $\omega(\delta)=\omega_1(\delta)$), 于是

$$|\mathscr{A}(u_r, u_r)-\mathscr{A}_{x^0}(u_r, u_r)|\leqslant c_4\omega(\delta)\|u_r\|_m^2,$$

且根据(6.1)(连同 **Fourier** 变换及 Plancherel 定理；这儿本质上涉及到 $u$ 在 $\Omega$ 中是紧致支集这个事实)，有

(6.5) $$\operatorname{Re}\mathscr{A}_{x^0}(u_r, u_r)\geqslant c_1\|u_r\|_m^2-c_2|u_r|^2$$

$\left[\text{更精确地}\geqslant c_1\sum\limits_{|\alpha|=m}\int_\Omega|B^\alpha u_r|^2dx\text{，这导致(6.5)}\right]$，由此得到

$$\operatorname{Re}a(u_r, u_r)\geqslant c_1\|u_r\|_m^2-c_2|u_r|^2-c_3\|u_r\|_m\|u_r\|_{m-1}$$
$$-c_4\omega(\delta)\|u_r\|_m^2.$$

代入(6.2)并选取 $\delta$ 足够小，就导得定理 1.1 中(i)的不等式.

## 7. 定理 1.1 的假设(ii)

**7.1** 重新以简化的记号表述(ii). 有一个泛函

(7.1) $$\mathscr{A}(u, v)=\sum_{k,l=0}^{m}\int_0^\infty a_{kl}\partial^k u\overline{\partial^l v}\,dt,\ \partial=-id/dt,$$

及阶数 $m_j<m$ 的算子 $B_j(\partial)$，$j=1, \cdots, p$，多项式 $B_j(\xi)$ 是线性独立的.

用 $H_{(B_j)}^m$ 表示空间:

(7.2) $$H_{(B_j)}^m=\{u|u\in H^m(0, \infty);\ B_j(\partial)u(0)=0,$$
$$j=1, \cdots, p\}.$$

要求

(7.3) $\operatorname{Re}\mathscr{A}(u, u)\geqslant c_1\|u\|^2$ 对一切 $u\in H_{(B_j)}^m$ 成立，$c_1>0$，

于此

$$\|u\|=\|u\|_{H^m(0,\infty)}.$$

**7.2** 泛函 $\mathscr{A}(u, v)$ 的分解:

(7.4) $$\mathscr{A}(u, v)=\mathscr{A}_1(u, v)+i\mathscr{A}_2(u, v),$$

于此

$$\mathscr{A}_1(u, v)=\frac{1}{2}[\mathscr{A}(u, v)+\overline{\mathscr{A}(v, u)}].$$

设 $\Lambda_1$ 为由三重结构 $\{H^m_{\{B_j\}}, L^2(0, \infty), \mathscr{A}_1(u, v)\}$ 所定义的算子(参见第四章). 用

(7.5) $$Z=\{u \mid u\in H^m_{\{B_j\}}, \Lambda_1(\partial)u=0\}$$

来定义空间 $Z$. 因此有

**定理 7.1** 使(7.3)成立的充要条件是下述两个条件成立:

(i) $\operatorname{Re}\mathscr{A}(\varphi, \varphi)\geqslant c_1\|\varphi\|^2$ 对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(]0, \infty[)$ 成立;

(ii) $\operatorname{Re}\mathscr{A}(z, z)\geqslant c_1\|z\|^2$ 对一切 $z\in Z$ 成立.

**证** 必要性显然,现证明充分性——暂时承认

**引理 7.1** 空间 $H^m_{\{B_j\}}$允许直和分解

(7.6) $$H^m_{\{B_j\}}=H^m_0\dot{+}Z;$$

若 $u\in H^m_{\{B_j\}}$, $u=u_0+z$, $u_0\in H^m_0$, $z\in Z$, 于是

(7.7) $$\mathscr{A}_1(z, u_0)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\mathscr{A}(u, u)&=\mathscr{A}_1(u, u)\\&=\mathscr{A}_1(u_0, u_0)+\mathscr{A}_1(z, z)+2\operatorname{Re}\mathscr{A}_1(z, u_0),\end{aligned}$$

且根据(7.7), (i)(对 $\varphi\in H^m_0$有效)及(ii), 由此得到

$$\operatorname{Re}\mathscr{A}(u, u)\geqslant c_1(\|u_0\|^2+\|z\|^2)\geqslant\frac{c_1}{2}\|u\|^2.$$

由此得到定理.

为证明引理 7.1, 首先验证

**引理 7.2** 使(i)成立的充要条件是

(7.8) $$\Lambda_1(\xi)=\operatorname{Re}\Lambda(\xi)\geqslant c_1\left(\sum_{j=0}^{m}|\xi|^{2j}\right), \xi\in R.$$

**证** 由 Fourier 变换及利用 Plancherel 定理立刻得到(7.8)的充分性.

现证明必要性．置

$$(7.9)\qquad Q(\xi)=\Lambda_1(\xi)-c_1\sum_{j=0}^{m}|\xi|^{2j}.$$

有

$$(7.10)\qquad \operatorname{Re}\mathscr{A}(\varphi,\ \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_1(\xi)|\hat{\varphi}(\xi)|^2d\xi,$$

$\hat{\varphi}=\varphi$ 的 Fourier 变换．

但若 $\varphi\in\mathscr{D}(R)$（而不再 $\in\mathscr{D}(]0,\ \infty[)$），且若

$$\mathscr{A}(\varphi,\ \varphi)=\sum\int_{-\infty}^{\infty}a_{kl}\partial^k\varphi\overline{\partial^l\varphi}\,dt,$$

还有 $\mathscr{A}(\varphi,\ \varphi)\geqslant c_1\|\varphi\|^2_{H^m(R)}$（取 $\varphi$ 的一个平移 $\tau\varphi$，它在]0, ∞[中为紧致支集，且应用(i)于 $\tau\varphi$）．接着(7.10)进行计算，因此有

$$(7.11)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}Q(\xi)|\hat{\varphi}(\xi)|^2d\xi\geqslant 0$$

对一切 $\varphi\in\mathscr{D}(R)$ 成立．过渡到极限，因此也对一切 $\varphi\in S(R)$ 成立，而 $S(R)=$ 使

$$|t^\alpha D^\beta\varphi(t)|\leqslant 0$$

对一切 $\alpha,\ \beta$ 成立的函数 $\varphi$ 的空间．

现在设 $\psi\in S(R)$，$\psi\geqslant 0$，于是若

$$\sqrt{\psi(\xi)+\varepsilon\exp(-|\xi|^2)}=\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi),$$

$\varepsilon>0$，$\hat{\varphi}_\varepsilon$ 是在 $S(R)$ 中，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q(\xi)(\psi(\xi)+\varepsilon\exp(-|\xi|^2))d\xi\geqslant 0,$$

且令 $\varepsilon\to 0$，有

$$(7.12)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}Q(\xi)\psi(\xi)d\xi\geqslant 0$$

对一切 $\psi\in S(R)$，$\psi\geqslant 0$ 成立．

现设 $\delta_{(a)}=$ 在点 $a$ 的质量1；存在 $\psi_j\in\mathscr{D}(R)$，$\psi_j\geqslant 0$，

$\psi_j \to \delta_{(a)}$ 在具紧致支集的测度空间中成立; $\int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi)\psi_j(\xi)d\xi$ 收敛于 $Q(a)$,由此得到 $Q(a)\geqslant 0$. 证毕.

**引理 7.1 的证明** 根据引理 7.2, $\Lambda_1(\xi)=0$ 有 $m$ 个虚部 $p>0$ 根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.

$$\Lambda_1(\partial)u \doteq 0$$

的在 $H^m(0, \infty)$ 中的解 $u$ 不全是

$$M(\partial)u=0$$

的所有的解,于此

(7.13) $$M(\xi)=\prod_{j=1}^{m}(\xi-\lambda_j),$$

结果得到 $Z$ 的下面的特征:

(7.14) $Z=\{u|M(\partial)u=0, B_j(\partial)u(0)=0, j=1, \cdots, p\}$.

$Z$ 的空间是 $m-p$ 维; 设 $Z_1, \cdots, Z_{m-p}$ 是 $Z$ 的基.

设 $B_{p+j}(\xi)$, $j=1, \cdots, m-p$, 是一组线性无关的 $m-1$ 次的多项式使得 $B_j$, $j=1, \cdots, m$, 是线性无关的.

于是

$$\text{“}B_j(\partial)u(0)=0,\ j=1, \cdots, m$$
$$\Leftrightarrow u^{(j)}(0)=0,\ j=0, \cdots, m-1\text{”}.$$

因而,对于在 $H^m_{(B_j)}$ 中给定的 $u$, 若

$$u=u_0+z, \quad u_0\in H_0^m(0, \infty),$$

于是

$$B_j(\partial)u(0)=B_j(\partial)z(0), \quad j=1, \cdots, m.$$

且若 $z\in Z$, 因为这对 $j=1, \cdots, p$ 是满足的(两个数都是零), 可见

(7.15) $$B_j(\partial)u(0)=B_j(\partial)z(0), \ j=p+1, \cdots, m.$$

反之,若 $z\in Z$ 且若(7.15)成立, 于是 $u-z\in H_0^m$, 但

$$'z=\sum_{i=1}^{m-p} d_i z_i,\ d_i \in C.$$

且(7.15)等价于

$$(7.16)\quad \sum_{i=1}^{m-p} d_i B_j(\partial) z_i(0) = B_j(\partial) u(0),\ j=p+1,\ \cdots,\ m.$$

且

$$\det_{i,j}\ (B_j(\partial) z_i(0)) \neq 0.$$

否则要存在 $z \in Z$, $z \neq 0$, 且 $z \in H_0^m$, 这是不可能的——因此 $d_i$ 被(7.16)以唯一的方式所定义, 且有(7.6). 关系式(7.7)是直接的; 事实上, 因为 $\Lambda_1 z=0$,

$$\mathscr{A}_1(z,\ u_0) = (\Lambda_1 z,\ u_0) = 0.$$

这达到了定理 7.1 的证明.

**注 7.1** 定理 7.1 的条件(ii)等价于

$$(\mathrm{ii})'\ \begin{cases} \text{形式} \sum_{i,j=1}^{m-p} \mathscr{A}_1(z_i,\ z_j)\xi_i \bar{\xi}_j \text{是正定的}, z_i \text{是} Z \text{的一个基} \\ \text{且}\ \xi_i \in C. \end{cases}$$

事实上, (ii)⇒(ii)′ 是显然的, 且若(ii)′ 成立, 于是对

$$z=\sum_{i=1}^{m-p} \xi_i z_i \in Z,$$

有

$$\mathrm{Re}\,\mathscr{A}(z,\ z) = \sum_{i,j=1}^{m-p} \mathscr{A}_1(z_i,\ z_j)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant c_2 \sum_{i=1}^{m-p} |\xi_i|^2 > c_3 \|z\|^2.$$

**结论** 将有强制性:

$$\mathrm{Re}\, a(v,\ v) \geqslant c_4 \|v\|^2 - c_5 |v|^2$$

对一切满足 $B_j(x,\ \partial)v|_\Gamma=0$, $j=1,\ \cdots,\ p$, 的 $v \in H^m(\Omega)$成立, 当:

1) 条件(6.1)成立;

2) 不管 $x_0$ 及 $\xi$ 如何, 由(1.5)所定义的泛函 $\mathscr{A}_{x^0,\xi}$ 对算子 $B'_j(x^0,\ \xi+\nu(x^0)\partial)$满足定理 7.1 的条件.

# 关于第六章的注记

定理1.1归功于 S. Agmon, The coerciveness problem for integro-differential forms, J. Anal Math. 6(1958), p.183～223.

这种类型的最初的结果是

a) 当 $B_j=\frac{\partial^j}{\partial\nu^j}$, $j=0, 1, \cdots, m-1$ 时, Gårding 的不等式(参见定理 6.1);

b) 当 $B_j$ 的系统为空时, Aronszajn 的不等式; 参见 Aronszajn, On coercive integro-differential quadratic forms, Conf. on Partial Differential Equations, University of Kansas, Report. N° 14 (1954), p.94～106.

对定理1.1的条件(i)、(ii)的必要性我们回到 Agmon 的上述文章——我们已经假设 $B_j$ 的系统是正规的——这不是不可少的(见 Agmon 的上述文章). 但是,这允许我们利用引理2.1且避免某些技术上的困难.

定理7.1同样归功于 Agmon, 见前述文章.

对本章中所研究的不等式的类型有兴趣的读者还可以研究下述的一些文章:

S. Agmon, Remarks on self-adjoint and semibounded elliptic boundary value problems, Proc. Int. Symp. Linear Spaces, Jerusalem, 1960, p.1～13;

S. Agmon-A. Donglis-L. Nirenberg, Estimates near The boundary…, Comm. Pure Applied Maths.,XII(1959), p. 623～727;

F. E. Browder, Estimates and existence…, Proc. Math. Acad. Sc. U. S. A., Vol. 45(1959), p. 365～372;

L. Hörmander, On the regularity…, Acta Math., Vol. 99(1958), p. 225～264; (以及 Hörmander 的最近的书, 将由 Springer 出版);

Schechter, Integral inequalities…, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 12(1959), p.37～66.

# 第7章

## 关于非齐次问题的概念

**总的目标:**

在N°1(不加证明地)给出一个正规性定理，且在N°2对于转置的方法给出一些注解. 这引导我们到N°3的一个一般性的表述，稍后(N°4)能证明它包含一些非齐次问题. 在N°5及6中解释这些问题. 最后，利用插值定理(N°7)得到新的表达方式.

### 1. 正规性的结果

设$\Omega$是$R^n$中的有界开集，具有无穷(或足够!)可微的$n-1$维的边界$\Gamma$，$\Omega$在$\Gamma$的一侧. 给出一个泛函

$$(1.1)\qquad a(u,\ v)=\sum_{|p|,\ |q|\leq m}\int_\Omega a_{pq}(x)D^q u\overline{D^p v}\,dx,$$

且假设

(1.2) $a_{pq}\in\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ (在$\overline{\Omega}$中无穷可微函数的空间).

同样(如同第六章)给出阶数$m_j<m$的算子$B_j(x,\ D)$，且其系数在$\mathscr{D}(\overline{\Omega})$中.

用$V$表示使

(1.3) $\qquad B_j(x,\ D)u=0$ 在$\Gamma$上成立

的$u\in H^m(\Omega)$所形成的(闭)空间. ($B_j$的个数$\leqslant m$; 若不考虑任何$B_j$，于是$V=H^m(\Omega)$. )

假设(参见第六章)

(1.4) $\operatorname{Re} a(v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2, \quad \|v\| = \|v\|_{H^m(\Omega)}$

对一切 $v \in V$ 成立，而 $\alpha > 0$.

我们指出(参阅注记中的文献)下面的结果：

**定理 1.1** 假设(1.4)式成立，且一切系数及边界为无穷可微；设 $u$ 是

(1.5) $$a(u, v) = (f, v), \quad v \in V$$

在 $V$ 中的解，而 $f$ 在 $H = L^2(\Omega)$ 中给定．若 $f \in H^k(\Omega)$，$k$ 整数 $\geqslant 0$，那末 $u \in H^{k+2m}(\Omega)$.

**注 1.1** 由闭图象定理可得线性映射 $f \to u$ 是由

$$H^k(\Omega) \to H^{k+2m}(\Omega)$$

的连续映射，即，存在常数 $c_k$ 使

(1.6) $$\|u\|_{H^{k+2m}(\Omega)} \leqslant c_k \|f\|_{H^k(\Omega)}.$$

事实上，在定理 1.1 的证明中同时就提供了对 $c_k$ 的估计.

**系 1.1** 若 $f \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$，于是 $u \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$.

事实上，

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(\Omega) = \mathscr{D}(\overline{\Omega}).$$

# 2. 转　　置

若 $K$ 是一个 Hilbert 空间，用 $K'$ 表示它的**反-对偶**，即在 $K$ 上的**反**-线性连续泛函的空间.

设 $A$ 是 $H$ 中的一个无界算子，具稠密定义域 $D(A)$，且 $A$ 是闭的；假设

(2.1) $A$ 是 $D(A)$ （装配以模 $(|f|^2 + |Af|^2)^{\frac{1}{2}}$）

在 $H$ 上的一个同构，

且，若 $A^*$ 是 $A$ 的共轭算子，假设

(2.2) $A^*$ 是 $D(A^*)$ 在 $H$ 上的一个同构.

取(2.2)式的共轭，就得到 $(A^*)^*=A^*$ 的共轭是 $H'$ 在 $D(A^*)'$ 上的一个同构. 我们将 $H'$ 与 $H$ 视为同一. 因此: $(A^*)^*$ 是 $H$ 在 $D(A^*)'$ 上的一个同构. 换言之: 若 $v\to L(v)$ 是 $D(A^*)$ 上的一个反-线性连续泛函，那末在 $H$ 中存在着唯一的一个元素 $u$ 使

(2.3) $(u, A^*v)=L(v)$ 对一切 $v\in D(A^*)$ 成立.

注意第四章为我们提供的满足(2.1)及(2.2)式的算子 $A$ 的例子.

**注 2.1** 由 $D(A^*)$ 在 $H$ 中稠密的事实得到: 我们可以将 $H$ 与 $D(A^*)'$ 的一个子空间视为同一; 因此有

$$H\subset D(A^*)',\quad H\subset D(A).$$

再注意 $(A^*)^*$ 是 $A$ 的一个延拓; 事实上, 若 $u\in D(A)$,

$$((A^*)^*u,\ v)=(u,\ A^*v)$$

对一切 $v\in D(A^*)$ 成立, 这对 $(Au,\ v)$ 仍为有效, 因此

$$((A^*)^*u-Au,\ v)=0$$

对一切 $v\in D(A^*)$ 成立, 因此在 $D(A^*)'$ 中成立

$$(A^*)^*u-Au=0,$$

这就证明了我们的断言. 因此这证明了 $(A^*)^*=A$. 因此

(2.4) $A$ 是 $D(A)$ 在 $H$ 上的一个同构

且又是 $H$ 在 $D(A^*)'$ 上的一个同构.

## 3. 正规性及转置的同时利用

**3.1** 现在在 N°1 的框架中考虑问题; 根据(1.4)式及第四章的结果, (2.1)及(2.2)成立.

应用定理 1.1 于 $k=0$ 的情形, 得到

(3.1) $$D(A)\subset H^{2m}(\Omega),\ D(A^*)\subset H^{2m}(\Omega).$$

**3.2** 由(3.1)得到在(2.3)中能特别地选取一个 $H^{2m}(\Omega)$ 上的反-线性连续泛函作为 $L(v)$. 例如:

设给定 $f$, $g_0$, $\cdots$, $g_{2m-1}$, 而

$$f\in L^2(\Omega),$$

$$g_j\in H^{-\left(2m-j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)\ \left(H^{2m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\text{的对偶(或反-对偶)}\right).$$

对 $v\in H^{2m}(\Omega)$, 置

(3.2) $$L(v)=\int_\Omega f\bar{v}dx+\sum_{j=0}^{2m-1}\left\langle g_j,\ \overline{\frac{\partial^j v}{\partial n^j}}\right\rangle.$$

它有意义, 因为 $\dfrac{\partial^j v}{\partial n^j}\in H^{2m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (参见第三章), 且因为映射 $v\to\dfrac{\partial^j v}{\partial n^j}$ 由 $H^{2m}(\Omega)\to H^{2m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是连续的, 表示式(3.2)定义了在 $H^{2m}(\Omega)$ 上——因而在 $D(A^*)$ 上——的一个反-线性连续泛函. 因而:

存在唯一的 $u\in L^2(\Omega)$ 使

(3.3) $$(u,\ A^*v)=\int_\Omega f\bar{v}dx+\sum_{j=0}^{2m-1}\left\langle g_j,\ \overline{\frac{\partial^j v}{\partial n^j}}\right\rangle$$

对一切 $v\in D(A^*)$ 成立.

## 4. 一个简单的例子

**4.1** 我们将取一个很简单的情况:

(4.1) $$a(u,\ v)=\int_\Omega u\bar{v}dx+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega(D_iu)\overline{(D_iv)}dx,$$

(4.2) $$V=H_0^1(\Omega).$$

于是

(4.3) $A=A^*,\ D(A)\,(=D(A^*))=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

我们取

(4.4) $$f\in L^2(\Omega),\ g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

且

(4.5) $$L(v)=(f,\ v)-\left\langle g,\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}\right\rangle,\ v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

(注意：若在现在的情形取(3.3)，因 $v\in H_0^1(\Omega)$，$V|_\Gamma=0$，因而 $\langle g_0,\ \bar{V}|_\Gamma\rangle=0$——因此我们就得到(4.5)，除去一个记号的改变而外.)

因此：存在唯一的 $u\in L^2(\Omega)$ 使

(4.6) $$(u,\ (-\Delta+1)v)=(f,\ v)-\left\langle g,\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial n}\right\rangle$$

对一切 $v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 成立.

## 4.2 (4.6)的形式上的解释.

现在来形式地解释(4.6)式，其验证将在 N° 5 中给出. 首先在(4.6)中取

$$v=\varphi\in\mathscr{D}(\Omega).$$

这导致

(4.7) $$(-\Delta+1)u=f.$$

(这不是形式上的！)

接着由(4.7)导得——现在是形式上地——

$$((-\Delta+1)v,\ v)=(f,\ \bar{v})$$
$$=(u,\ (-\Delta+1)v)+\left\langle g,\ \frac{\partial\bar{v}}{\partial n}\right\rangle,$$

且由"Green 公式"

$$((-\Delta+1)u,\ v)=-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\bar{v}d\sigma+\int_\Gamma u\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}d\sigma$$
$$+(u,\ (-\Delta+1)v).$$

由此通过比较并注意到 $v|_\Gamma=0$ 得到:

$$\int_\Gamma u\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}d\sigma=\int_\Gamma g\frac{\partial \bar{v}}{\partial n}d\sigma,$$

"由此"

(4.8) $$u|_\Gamma=g.$$

因此问题在于一个带非齐次边界条件的 Dirichlet 问题(若 $g\neq 0$) 且 $u$ 是在 $L^2(\Omega)$ 中($u\notin H^1(\Omega)$, 正如将要看到的那样).

验证首先建立在关于迹的一个问题的基础上: 若 $u\in L^2(\Omega)$, 且若 $\Delta u\in L^2(\Omega)$, 问能否定义 $u|_\Gamma$? 在下面我们将证明此问题的回答是肯定的.

## 5. 一个迹定理

**5.1** 用 $H(\Delta;\Omega)$ 表示使 $\Delta u\in L^2(\Omega)$ 的 $u\in L^2(\Omega)$ 的空间, 它对模

$$\left(\int_\Omega(|u|^2+|\Delta u|^2)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

而言是一个 Hilbert 空间.

将证明

**定理 5.1** 空间 $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ 在 $H(\Delta;\ \Omega)$ 中稠密, 由 $\mathscr{D}(\overline{\Omega})\to\mathscr{D}(\Gamma)\times\mathscr{D}(\Gamma)$ 的映射

$$u\to\{\gamma_0 u,\gamma_1 u\}\quad\begin{cases}\gamma_0 u=u\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上的迹},\\ \gamma_1 u=\dfrac{\partial u}{\partial n}\ \text{在}\ \Gamma\ \text{上的迹},\end{cases}$$

可由连续性延拓为由 $H(\Delta;\Omega)$ 到 $H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-3/2}(\Gamma)$ 中的一个线性连续映射，所延拓的映射仍记为 $u\to\{\gamma_0 u, \gamma_1 u\}$; $\gamma_0 u$ 是 $u$ 在 $\Gamma$ 上的迹(由定义!)，$\gamma_1 u$ 是法向导数的迹.

## 5.2 $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ 的稠密性的证明.

设 $u\to M(u)$ 是 $H(\Delta;\Omega)$ 上的一个反-线性连续泛函，它是形如(参见第一章)

$$M(u)=(f, u)+(g, \Delta u),\ f,\ g\in L^2(\Omega) \tag{5.1}$$

的泛函. 设对于一切 $\varphi\in\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ 成立 $M(\varphi)=0$，要证明

$$M(u)=0$$

对于一切 $u\in H(\Delta;\Omega)$ 成立——这就将证明我们的断言——但若 $\Phi\in\mathscr{D}(R^n)$，$\varphi=\Phi$ 在 $\Omega$ 上的限制，且若用 $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ 表示 $f$ 及 $g$ 在 $R^n$ 上的延拓，它们在 $\Omega$ 之外为 0，于是

$$M(\varphi)=(\tilde{f}, \Phi)+(\tilde{g}, \Delta\Phi)=(\tilde{f}+\Delta\tilde{g}, \Phi),$$

且由假设 $M(\varphi)=0$，因而

$$\tilde{f}+\Delta\tilde{g}=0. \tag{5.2}$$

于是 $\tilde{g}\in L^2(R^n)$，且 $\Delta\tilde{g}=-\tilde{f}\in L^2(R^n)$，因而(例如说用 Fourier 变换)，$\tilde{g}\in H^2(R^n)$. 但 $\tilde{g}$ 在 $C\overline{\Omega}$ 中为零，由此得到 $\tilde{g}\Big|_\Gamma=0$, $\dfrac{\partial\tilde{g}}{\partial n}\Big|_\Gamma=0$，即 $\gamma_0 g=0$, $\gamma_1 g=0$ 且因而(参见第三章)

$$g\in H_0^2(\Omega). \tag{5.3}$$

于是存在一个序列 $\psi_j\in\mathscr{D}(\Omega)$ 使 $\psi_j\to g$ 在 $H^2(\Omega)$ 中成立; 但对 $u\in H(\Delta;\Omega)$，成立 $(\psi_j, \Delta u)=(\Delta\psi_j, u)$，过渡到极限得

$$(g, \Delta u)=(\Delta g, u), \tag{5.3$'$}$$

结果使(5.1)式可写为

$$M(u)=(f+\Delta g, u).$$

但由(5.2)，$f+\Delta g=0$，因此 $M(u)=0$. 证毕.

## 5.3 定理5.1的证明

设 $\varphi_0\in H^{3/2}(\Gamma)$, $\varphi_1\in H^{1/2}(\Gamma)$任意. 存在(参见第三章) $W(\varphi)\in H^2(\Omega)$ [$\varphi$ 表示$\{\varphi_0, \varphi_1\}$]使

(5.4) $$\gamma_0W(\varphi)=\varphi_0,\ \gamma_1W(\varphi)=\varphi_1,$$

(5.5) $\{\varphi_0, \varphi_1\}\to W(\varphi)$是一个由 $H^{3/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)\to H^2(\Omega)$的线性连续映射.

于是,对在 $H(\Delta;\Omega)$中固定的$u$, 置

(5.6) $$X_u(\varphi)=(\Delta u,\ W(\varphi))-(u,\ \Delta W(\varphi)).$$

**引理5.1** $X_u(\varphi)$与$W(\varphi)$的选取无关, 其中$W(\varphi)$假设在$H^2(\Omega)$中且满足(5.4)式.

**证** 设$W_1$及$W_2$在$H^2(\Omega)$中,且

$$\gamma_0W_i=\varphi_0,\ \gamma_1W_i=\varphi_1,\ i=1,\ 2.$$

应该证明

$$(\Delta u,\ W_1)-(u,\ \Delta W_1)=(\Delta u,\ W_2)-(u,\ \Delta W_2),$$

因而

(5.7) $$(\Delta u,\ W_1-W_2)=(u,\ \Delta(W_1-W_2)).$$

但

$$\gamma_0(W_1-W_2)=0,\ \gamma_1(W_1-W_2)=0,$$

因此

$$W_1-W_2\in H_0^2(\Omega),$$

由此就得到(5.7)(正如为得到(5.3)′那样).

这个引理证实了记号 $X_u(\varphi)$的合理性. 根据(5.5), 泛函$\varphi\to X_u(\varphi)$在 $H^{3/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)$ 上是连续的,因此可写为

(5.8) $$X_u(\varphi)=\langle h,\ \bar{\varphi}_0\rangle-\langle g,\ \bar{\varphi}_1\rangle,\ g\in H^{-1/2}(\Gamma),\ h\in H^{-3/2}(\Gamma).$$

现证明

**引理5.2** 若$u\in\mathscr{D}(\bar{\Omega})$,有

$$u\Big|_{\Gamma}=g,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=h.$$

**证** 事实上，若 $u\in\mathscr{D}(\overline{\Omega})$，

$$\begin{aligned}&(\Delta u,\ W(\varphi))-(u,\ \Delta W(\varphi))\\&=\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\overline{W(\varphi)}\,d\sigma-\int_{\Gamma}u\,\frac{\overline{\partial W(\varphi)}}{\partial n}\,d\sigma\\&=\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\,\overline{\varphi}_0 d\sigma-\int_{\Gamma}u\overline{\varphi}_1\,d\sigma,\end{aligned}$$

由此与(5.8)进行比较就得到结果.

因此由定义(根据 5.2 中所建立的稠密性)可置

$$g=\gamma_0 u,\ h=\gamma_1 u.$$

因此

$$X_u(\varphi)=\langle\gamma_1 u,\ \overline{\varphi}_0\rangle-\langle\gamma_0 u,\ \overline{\varphi}_1\rangle. \tag{5.9}$$

我们已经定义了一个由 $H(\Delta;\Omega)$ 到 $H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-3/2}(\Gamma)$ 中的线性映射

$$u\to\{\gamma_0 u,\ \gamma_1 u\}.$$

剩下来要证明这个映射的连续性. 但

$$|X_u(\varphi)|\leqslant c_1\|u\|_{H(\Delta;\Omega)}\|W(\varphi)\|_{H^2(\Omega)}$$

及

$$\|W(\varphi)\|_{H^2(\Omega)}\leqslant c_2\|\,|\varphi|\,\|,$$

其中

$$\|\,|\varphi|\,\|=(\|\varphi_0\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)}+\|\varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)})^{\frac{1}{2}}.$$

由此

$$\|\{\gamma_0 u,\ \gamma_1 u\}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{-3/2}(\Gamma)}\leqslant c_3\|u\|_{H(\Delta;\Omega)}.$$

证毕.

**练习** 若 $u\in L^2(\Omega)$ 且 $\Delta u=H^{-1}(\Omega)$. 证明仍可以定义 $\gamma_0 u\in H^{-1/2}(\Gamma)$ [先考察 $u_0\in H_0^1(\Omega)$ 且

$$(-\Delta+1)u_0=(-\Delta+1)u,$$

然后在 $u-u_0$ 上进行推理]. 证明不能定义 $\gamma_1 u$.

## 6. (4.6) 的解释

现在我们能验证 N° 4.2.

事实上，现在知道

(6.1) $\quad (+\Delta u, v)-(u, +\Delta v)=\langle\gamma_1 u, \overline{\gamma_0 v}\rangle-\langle\gamma_0 u, \overline{\gamma_1 v}\rangle$

对 $u\in H(\Delta;\Omega)$, $v\in H^2(\Omega)$ 成立.

因此能将(4.6)改写为下面等价的形式:

$$((-\Delta+1)u, v)-\langle\gamma_0 u, \gamma_1 v\rangle+\langle\gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle$$
$$=(f, \bar{v})-\left\langle g, \frac{\partial v}{\partial n}\right\rangle,$$

且因为 $(-\Delta+1)u=f$, $\gamma_0 v=0$, 得到

(6.2) $$\langle\gamma_0 u, \overline{\gamma_1 v}\rangle=\langle g, \overline{\gamma_1 v}\rangle$$

对一切 $v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 成立.

于是(6.2)对在 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$中的任意的$\gamma_1 v$ 均成立，因而 $\gamma_0 u=g$.

我们已得到

**定理 6.1** 对于在 $L^2(\Omega)$ 中给定的 $f$ 及在 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中给定的 $g$，存在唯一的 $u\in L^2(\Omega)$ 使

(6.3) $$(-\Delta+1)u=f,$$

(6.4) $$\gamma_0 u=g.$$

**练习** 证明定理 6.1 对 $f\in H^{-1}(\Omega)$ 也有效. 在(4.2)中用 $V=H^1(\Omega)$ 代替 $V=H_0^1(\Omega)$，选择 $L(v)$ 的样式使能得到非齐次 Neumann 问题:

(6.3) $$(-\Delta+1)u=f, \quad f\in L^2(\Omega),$$

(6.5) $$\gamma_1 u=h, \quad h\in H^{-3/2}(\Gamma).$$

# 7. 关于插值映射的概念

**7.1** 首先证明

**定理 7.1** 若 $f$ 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中给定且 $g$ 在 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中给定，存在唯一的 $u\in H^1(\Omega)$ 使

$$(-\Delta+1)u=f, \tag{7.1}$$

$$\gamma_0 u=g. \tag{7.2}$$

**证** 设 $w\in H^1(\Omega)$ 使 $\gamma_0 w=g$ 成立($w$ 存在且可选得连续地依赖于 $g$；参见第三章)．于是 $u-w$ 应满足

$$(-\Delta+1)(u-w)=f-(-\Delta+1)w=h,$$

$$\gamma_0(u-w)=0,$$

即

$$\begin{cases}(-\Delta+1)(u-w)=h,\ h \text{ 在 } H^{-1}(\Omega) \text{ 中给定}, \\ (u-w)\in H_0^1(\Omega).\end{cases}$$

而这就以唯一的方式确定了 $u-w$(参见第四章)．

**7.2** 现在一方面利用定理 7.1，另一方面利用定理 6.1 及其后面的练习．因而有一个线性映射

$$\{f,\ g\}\xrightarrow{\mathscr{G}} u,$$

它

1°) 由 $H^{-1}(\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\rightarrow H^1(\Omega)$，

2°) 由 $H^{-1}(\Omega)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\rightarrow L^2(\Omega)$

均是连续的．因此可以应用第三章的定理 10.1．因而：对

$$0<\frac{1}{2}+\alpha<1,\ \mathscr{G}$$

是一个由

$$T(2,\ \alpha;\ H^{-1}(\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\Omega),\ H^{-1}(\Omega)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$$

到 $T(2,\ \alpha;\ H^1(\Omega),\ L^2(\Omega))$ 中的线性连续映射.

可以证明(作为练习)

$$T(2,\ \alpha;\ H^{-1}(\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\ H^{-1}(\Omega)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$$
$$=T(2,\ \alpha;\ H^{-1}(\Omega),\ H^{-1}(\Omega))$$
$$\times T(2,\ \alpha;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

可以证明(作为练习)

$$T(2,\ \alpha;\ H^{-1}(\Omega),\ H^{-1}(\Omega))=H^{-1}(\Omega).$$

可以证明

(7.3) $$T(2,\ \alpha;\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))=H^{-\alpha}(\Gamma).$$

**练习** 当 $\Gamma=R^{n-1}$ 时验证(7.3). [利用定理5.1; 在经过Fourier变换后 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 变为 $\hat{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 变为 $\hat{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$; 验证 $\hat{H}^{\frac{1}{2}}$ 是由exp. $(-(1+|\xi|)t)$ 的乘法所定义的半群的无穷小生成元的定义域.]

**练习** 从上述练习出发并利用局部化证明(7.3)式.

我们已经看到(参见第三章)

(7.4) $$T(2,\ \alpha;\ H^1(\Omega),\ L^2(\Omega))=H^{\frac{1}{2}-\alpha}(\Omega).$$

**结论** $g$ 是一个由 $H^{-1}(\Omega)\times H^{-\alpha}(\Gamma)\to H^{\frac{1}{2}-\alpha}(\Omega)$ 的线性连续映射.

换言之: 对在 $H^{-1}(\Omega)$ 中给定的 $f$ 及在 $H^{-\alpha}(\Gamma)$ 中给定的 $g$, 在 $H^{\frac{1}{2}-\alpha}(\Omega)$ 中存在着唯一的 $u$ 使

(7.5) $$-\Delta u+u=f,$$

(7.6) $$\gamma_0 u=g.$$

这对 $0<\frac{1}{2}+\alpha<1$ 即 $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$ 成立.

存在性实际上已被证明[因为，特别说，$u\in L^2(\Omega)$是在 $\Delta u\in H^{-1}(\Omega)$之中，故(7.6)式有意义].

唯一性是直接的，因为在 $u\in L^2(\Omega)$ 这一个假设下已经有唯一性了.

**例** 取 $\alpha=0$，于是可见若 $g\in L^2(\Gamma)$，则解 $u\in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

**练习** 设 $u\in L^2(\Omega)$ 且 $\Delta u\in H^{-1}(\Omega)$. 证明一般说来 $\gamma_0 u$ (它在 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中)不在 $H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma)$ 中，于此 $\varepsilon>0$.

**练习** 取 $\Omega$ 为 $R^n$ 中的开集 $x_n>0$. 通过一个明显的计算证明

$$\begin{cases}-\Delta u+u=f,\ g\in L^2(R^{n-1}_{x'}),\ f\in H^{-1}(\Omega),\\ u(x',\ 0)=g(x').\end{cases}$$

可确定 $u\in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. [先回到情况 $f=0$; 然后通过对 $x'$ 的 Fourier 变换计算 $u$，并通过对 $x_n$ 的偶延拓来延拓到 $R^n$.]

## 关于第七章的注记

对于定理1.1可以参看 Agmon-Douglis-Nirenberg, Browder, Schechter 的工作，同样可参看 Magenes 和 Stempacchia 的报告: Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, 12, (1958), p.267～358 及作者在 Tata Institute 的讲义(包含着 Aronszajn-Smith 的补偿法的一个叙述; 也参看 N. Aronszajn 的文章: Associated Spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems, Berkeley, Avril 1960

中对此主题的简短的注解).

N° 2 及 3 中所述的方法改编自 I. M. Visik-S. L. Sobolev, Doklady Akad Nauk, t. III (1956), p. 521～523; J. L. Lions, C. R. Acad, Sc. Paris, t. 244(1957), p. 1126～1128.也可以参看 M. Schechter 在 Communications on Pure and Applied Math., 1960, 1961, 1962-上的最近的及将发表的工作.

N° 5, 6, 7 的结果是 E. Magenes 及作者的文章 Annales Institut Fourier, t. II(1961), p. 137～178 的摘录.

所有这些结果可以推广到在空间 $L^p$, $p\neq 2$中的边值问题; 对此我们可回到 J. L. Lions-E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei (V), Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, t. XVI (1962), p. 1～44 (其中可发现完整的文献), 同样可回到同一作者的论文"Remarques sur les problèmes aux limites linéaires elliptiques, 它将在 Rend. dei Lincei 上发表.